■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

6

第１章　数列　２・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その１）

（１／８）■　分数数列の和　■

部分分数に分ける

★知識の整理★

【１】<u>部分分数に分ける</u>

$\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ のような分母が整数の積の分数式は，<u>分母の因数をそれぞれ分母とした分子が１の差</u>の形に変形することができる。

公式　$\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

《具体例》

Ⅰ型　$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$　◀（証明）$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+2-n}{n(n+2)}=\dfrac{1}{n(n+2)}$

$(n+2)-n=2$

Ⅱ型　$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{1}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$(n+1)-n=1$

Ⅲ型　$\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{2}{1}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$　◀（証明）$2\cdot\dfrac{n+1-n}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n(n+1)}$

$(n+1)-n=1$

★

一般型　$\dfrac{2}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$

$(3n+2)-(3n-1)=3$

【注】このような式の変形を，「**部分分数に分ける**」といいます。

＊【参考】<u>分母の因数が３個の場合</u>　◀No.6sで利用する。

(1)　$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

前から２つ　後から２つ

$(n+2)-n=2$

(2)　$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$

前から２つ　後から２つ

（２ｎ＋３）－（２ｎ－１＝４

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

分数数列の和

◇《分数数列の和》学力化➡　／　，

★解法の技術★

次の和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

【考え方】＊特殊な計算　・分母に$\sqrt{\ }$を含む数列は，まず **分母の有理化** をする。
・分数や$\sqrt{\ }$を含む数列の和がΣを使って表されているときは，**各項の和の形** に書き直す。

［答　案］

(1) $\boxed{1}$ （一般項を部分分数に分ける）

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$ ◀数列の和をΣで表す

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$ ◀部分分数に分けた→No.6（1／8）を参照

$\boxed{2}$ （数列の和を求める）

$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k+2}\right)$$ ◀Σの分配法則

一気に消える！

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$ ◀Σを和の形へ

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$ ◀（　）内の後項は－であること注意

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n+2-2}{2(3n+2)}$$ ◀（　）内を通分

$$=\frac{n}{2(3n+2)}$$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗ （前のページからのつづき）

(2) $\boxed{1}$ （分母を有理化する）

$$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}$$

$$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$$

$\boxed{2}$ （数列の和を求める）

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$ ◀分母を有理化

一気に消える！

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+2}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}$$ ◀Σの分配法則

$$=(\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$$ ◀Σを和の形へ

$$-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{n+1})$$

$$=\underline{\sqrt{n+2}-\sqrt{2}}$$ ◀後項は－であること注意