１４

第５章　微分と積分　３・積分

3 面積と定積分（その１）

（１／５）■　定積分と図形の面積②　■

放物線間，放物線と直線間の面積

これまでは，χ軸と放物線で囲まれた図形の面積を求めてきましたが，「図をかいて，上－下の∫」の考え方を使うと，「χ軸と～で囲まれた」だけではなく，放物線と直線（χ軸以外），曲線と曲線で囲まれた図形の面積も求めることができます。

つまり，「図をかいて，上－下の∫」の考え方１つで，どんな面積も求めることができるようになります。

★解法の技術★

次の面積を求めなさい。

(1) 放物線 $y=x^2-2$ と直線 $y=-2x+1$ で囲まれた部分の面積

(2) ２つの放物線 $y=x^2+2x-4$ と $y=-x^2+2x+4$ で囲まれた部分の面積

(3) 放物線 $y=-x^2+4x$ と３直線 $y=x$，$x=-1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積

【考え方】「図をかいて，上－下の∫」で求めます。

(1)，(2) 交点から交点までの面積を求めるときは「マイナス６分の１の公式」を使います。ただし，x^2 の係数を１にしてから使うこと！

(3) y軸より左の部分と右の部分を別々に定積分で面積を求め，２つの部分を合わせて全体の面積を求めます。

［考える手順］

0 グラフの交点を求める

1 図をかく

2 面積を求める

（◀上－下の∫）

［答　　案］

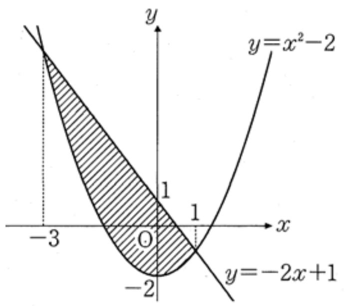
(1) 放物線と直線との交点の χ 座標は，

$x^2-2=-2x+1$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3,\ 1$



$S=\int_{-3}^{1}\{(-2x+1)-(x^2-2)\}\,dx$　◀交点から交点までも面積 →マイナス6分の1の公式！

$=\int_{-3}^{1}(-x^2-2x+3)\,dx$

$=-\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)\,dx$　◀ x^2 の係数を1に！→－1を割り出す

$=-\left[-\frac{1}{6}\{1-(-3)\}^3\right]$　◀マイナス6分の1の公式

$=\underline{\frac{32}{3}}$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【積分 No. １４（１／５）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

0 グラフの交点を求める
1 図をかく

(2) ２つの放物線の交点の x 座標は，

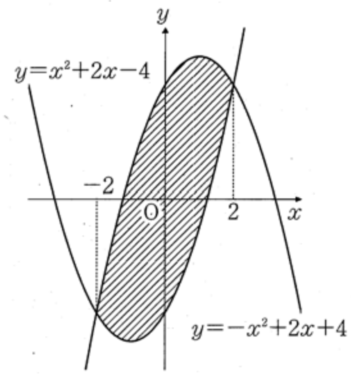
$x^2+2x-4=-x^2+2x+4$

$2x^2-8=0$

$x^2-4=0$

$(x+2)(x-2)=0$

$x=-2,\ 2$



2 面積を求める

（◀上－下の∫）

$$S=\int_{-2}^{2}\{(-x^2+2x+4)-(x^2+2x-4)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(-2x^2+8)\,dx$$

$$=-2\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx$$ ◀ x^2の係数を1に！→－2を割り出す

$$=-2\cdot\left[-\frac{1}{6}\{2-(-2)\}^3\right]$$ ◀マイナス6分の1の公式

$$=\frac{64}{3}$$

0 グラフの交点を求める
1 図をかく

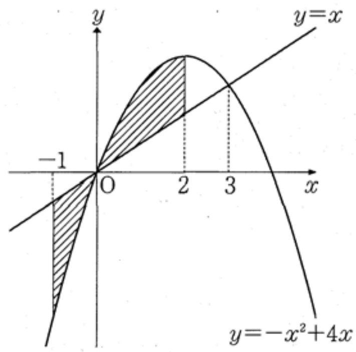
(3) 放物線と直線との交点の x 座標は，

$-x^2+4x=x$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$



2 面積を求める

２つの部分に分ける

$$S=\int_{-1}^{0}\{x-(-x^2+4x)\}\,dx+\int_{0}^{2}\{(-x^2+4x)-x\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^2+3x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\left\{0-\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{8}{3}+6\right)-0\right\}$$

$$=\frac{11}{6}+\frac{10}{3}$$

$$=\frac{31}{6}$$

＊「マイナス6分の1の公式」を使うとき，(　)内の式は全く使わないので式を因数分解する必要はない。