

関数 $(a x + b)^n$ の微分と積分 ① — 微分 —

◇ 《関数 $y = (a x + b)^n$ の微分》 学力化 → /

★知識の整理★

n を自然数, a, b を定数として, 関数 $y = (a x + b)^n$ の微分と積分について考えてみよう。

【1】関数 $y = (a x + b)^n$ の微分

$y = a x + b$ のとき, $y' = a$

$y = (a x + b)^2$ のとき, $y = a^2 x^2 + 2 a b x + b^2$ より,

$$y' = 2 a^2 x + 2 a b = 2 a (a x + b)$$

$y = (a x + b)^3$ のとき, $y = a^3 x^3 + 3 a^2 b x^2 + 3 a b^2 x + b^3$ より,

$$y' = 3 a^3 x^2 + 6 a^2 b x + 3 a b^2$$

$$= 3 a (a^2 x^2 + 2 a b x + b^2) = 3 a (a x + b)^2$$

となる。まとめると,

$y = a x + b$ のとき $y' = a$

$y = (a x + b)^2$ のとき $y' = 2 a (a x + b)$

$y = (a x + b)^3$ のとき $y' = 3 a (a x + b)^2$

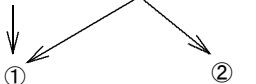
...

◀微分プロセスを理解すると
公式は覚えなくとも必要に
応じて自分で作れる。

よって, 一般に, 次の公式が成り立つ。

▼ 関数 $y = (a x + b)^n$ の微分 ▼

$y = (a x + b)^n$ のとき

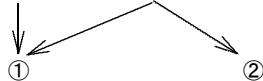


$y' = \underline{n a} (a x + b)^{n-1}$

(おぼえ方) ① 指数と x の係数の積を係数とし,

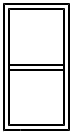
② 指数を 1 減らす。

(具体例) $y = (2 x - 3)^5$ のとき,



$y' = \underline{5 \cdot 2} (2 x - 3)^4 = 10 (2 x - 3)^4$

▲①指数と x の係数の積 ↑ ②指数1減



関数 $(ax + b)^n$ の微分と積分 ② 一積分

◇ 《関数 $y = (ax + b)^n$ の積分》 学力化 → /

★知識の整理★

【2】 $(ax + b)^n$ の積分

$y = (ax + b)^n$ のとき $y' = na(ax + b)^{n-1}$

この公式を用いると、

$$\left\{ \frac{1}{(n+1)a} (ax + b)^{n+1} \right\}' = (ax + b)^n \text{ である。}$$

▲左辺の指数と x の係数の積を係数とし、指数を1減らすと、右辺になる。

よって、 n が0以上の整数のとき、次の公式が成り立つ。

▼ 関数 $y = (ax + b)^n$ の積分 ▼

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a} (ax + b)^{n+1} + C$$

◀ a は x の係数

- (おぼえ方) ① 指数を1増やし、
 ② 指数と x の係数の積を分母、1を分子とした分数 を係数とする。

(例1) 不定積分の場合

$$\int (3x - 2)^5 dx = \frac{1}{(5+1) \cdot 3} (3x - 2)^{5+1} + C = \frac{1}{18} (3x - 2)^6 + C$$

↑ ② 指数と x の係数の積を分母、1を分子とした分数 ↑ ① 指数1増

(例2) 定積分の場合

$$\int_2^3 (x - 2)^7 dx = \left[\frac{1}{(7+1) \cdot 1} (x - 2)^8 \right]_2^3 = \frac{1}{8} (3 - 2)^8 = \frac{1}{8}$$

↑ ② 指数と x の係数の積を分母、1を分子とした分数 ↑ ① 指数1増