■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

◇《三角形の垂心》学力化➡　　／　，

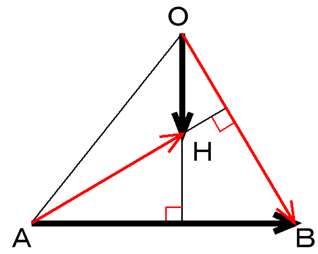
★解法の技術★

平面上に三角形ＯＡＢがあり，ＯＡ＝５，ＯＢ＝６，ＡＢ＝７とする。また，△ＯＡＢの垂心をＨとする。

(1) cos∠ＡＯＢを求めよ。

(2) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

【考え方】この例題のような位置ベクトルの問題では，与えられた図形の条件をベクトルの条件に直して解く。



三角形の垂心とは，三角形の３つの頂点からそれぞれの対辺またはその延長に下ろした垂線の交点であり，

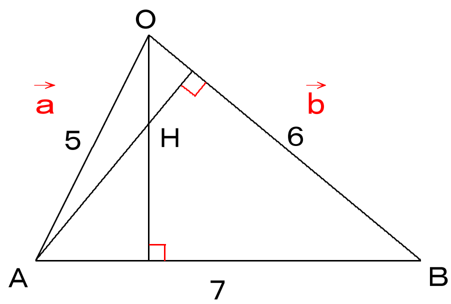
△ＯＡＢの垂心がＨのとき，

図形の条件は，　　　　　　　ＯＨ⊥ＡＢ，ＡＨ⊥ＯＢ

これをベクトルの条件に直すと，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{OB}$

ゆえに，(2) では $\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ を利用して，ｓ，ｔの値を求める。

［答　　案］



(1) 余弦定理から，

$7^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cos\angle AOB$

$\Leftrightarrow\ \cos\angle AOB=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$

(2) $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表す

1 （求めるベクトルを定義する）

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$　とする。　◀ベクトルの分解公式：求める形

2 （ｓ，ｔの値を求める）

点Ｈは△ＡＢＣの垂心であるから，

（ｉ）ＯＨ⊥ＡＢ

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　◀垂直　→　内積＝０

$\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$　◀基点がＯのベクトルに書き換える。

$(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$　◀位置ベクトルに置き換える。

$-s|\vec{a}|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$　◀分配法則

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

（前のページからのつづき）

ここで，　条件より，ＯＡ＝５，ＯＢ＝６，(1)より$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{5}$であるから

$|\vec{a}|=|\overrightarrow{OA}|=5$，　$|\vec{b}|=|\overrightarrow{OB}|=6$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=5\cdot6\cdot\dfrac{1}{5}=6$

$-25s+6(s-t)+36t=0$

$-19s+30t=0$　…①

（ⅱ）　ＡＨ⊥ＯＢ

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$　◀垂直　→　内積＝０

$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}=0$　◀基点がＯのベクトルに書き換える。

$\{(s\vec{a}+t\vec{b})-\vec{a}\}\cdot\vec{b}=0$　◀位置ベクトルに置き換える。

$\{(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\}\cdot\vec{b}=0$

$(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$　◀分配法則

ここで，（ｉ）で求めたベクトルの大きさを参照して，

$6(s-1)+36t=0$

$s+6t=1$　…②

①，②を連立して解いて，$s=\dfrac{5}{24}$，　$t=\dfrac{19}{144}$

3　（答をまとめる）

したがって，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{5}{24}\vec{a}+\dfrac{19}{144}\vec{b}$