■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

２直線の交点

★知識の整理★

【１】ベクトルの分解

どんなベクトル $\vec{p}$ も，$\vec{0}$ でなく平行でない２つのベクトルを用いて，

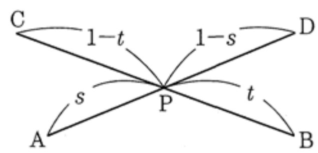
$\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$

の形にただ一通りに表される。

よって，$m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b} \iff m=m',\ n=n'$

＊詳細は，下記「資料」を参照

【２】２つの線分の交点の位置ベクトルの求め方



ＡＰ：ＰＤ＝ｓ：（１－ｓ）

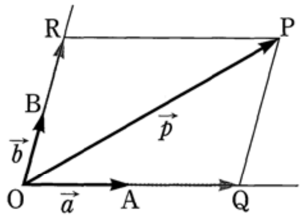
ＢＰ：ＰＣ＝ｔ：（１－ｔ）

とおいて，Ｐの位置ベクトルを２通りに表す。

＊ベクトルの分解「資料」（「ベクトルの分解」の項目で既習）

ベクトルの分解

平面上に2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ がある。この $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が $\vec{0}$ でなく平行でないとき，この平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の2方向に分解することによって，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を使って表してみよう。



点Oを平面上の1点とし，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ となるように，点A，Bをとる。

今，$\vec{p}$ に対して，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ となる点Pをとり，Pを通って直線OB，OAに平行な直線が，直線OA，OBと交わる点を，それぞれ，Q，Rとすると，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

である。2点Q，Rは，それぞれ，直線OA，OB上にあるから，

$$\overrightarrow{OQ}=m\vec{a},\qquad \overrightarrow{OR}=n\vec{b}$$

と表され，$\vec{p}$ は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を使って，次のように表される。

$$\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$$

ここで，m，n は，$\vec{p}$ に対してただ1通りに定まる実数である。

上のことから，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，

$$m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b} \iff m=m',\ n=n'$$

とくに，$m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0} \iff m=n=0$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗（前のページからのつづき）

★知識の整理★

【３】直線ＡＢ上の点Ｐの位置ベクトルの表し方

△ＯＡＢにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

点Ｐが線分ＡＢを２：３に内分するとき，$\vec{p}=\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$ …① ◀分母は 2＋3

点Ｑが線分ＡＢを５：２に外分するとき，$\vec{q}=\dfrac{-2\vec{a}+5\vec{b}}{3}$ …② ◀分母は 5−2

このとき，点Ｐ($\vec{p}$)も点Ｑ($\vec{q}$)も直線ＡＢ上にある。

①と②を書きかえると，

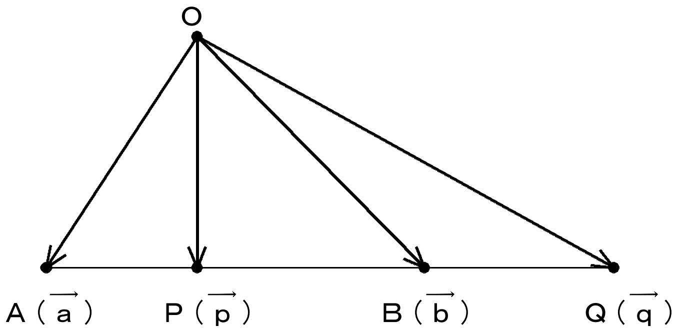
$\vec{p}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{b}$ …①’　　$\vec{q}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{3}\vec{b}$ …②’

⬆係数の和が１　　⬆係数の和が１

つまり，点Ｐや点Ｑが直線ＡＢ上にある条件は，

$\vec{p}$ や $\vec{q}$ を $\vec{a}$ や $\vec{b}$ で表現したときに，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数の和が１になる

ということである。



この性質は，２つの線分の交点Ｐの位置ベクトルを求めるときに使います。

▼　直線ＡＢ上の点Ｐの位置ベクトルの表し方　▼

線分ＡＢ上に点Ｐがあり，ＡＰ：ＰＢが不明のとき

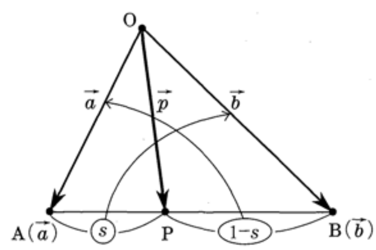
ＡＰ：ＰＢ＝ｓ：（１－ｓ）

として，分点公式を使い

$$\vec{p}=\frac{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}}{s+(1-s)}$$

⬆係数の和が１

とする。



■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

★解法の技術★

△ＯＡＢにおいて，辺ＯＡを３ : ２に内分する点をＣ，辺ＯＢを２ : １に内分する点をＤとし，線分ＡＤと線分ＢＣの交点をＰとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とするとき，$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表しなさい。

【考え方】前のプリントを参照

［答　　案］　＜H25版・フォレスタ・数学B・2－17・Warm Up　改題＞

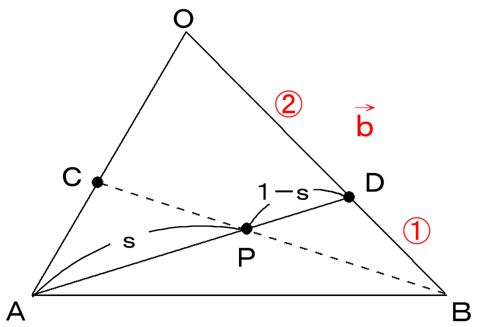
1 ＡＰ : ＰＤ＝ｓ : （１－ｓ）とすると，
点ＰはＡＤをｓ : （１－ｓ）に内分する点になるので

$$\overrightarrow{OP}=\frac{(1-s)\overrightarrow{OA}+s\,\overrightarrow{OD}}{s+(1-s)}$$

$$=(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\,\vec{b}\quad\cdots①$$

$$▲\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\vec{b}$$

点Pを線分AD上で考える



2 ＢＰ : ＰＣ＝ｔ : （１－ｔ）とすると，
点ＰはＢＣをｔ : （１－ｔ）に内分する点になるので

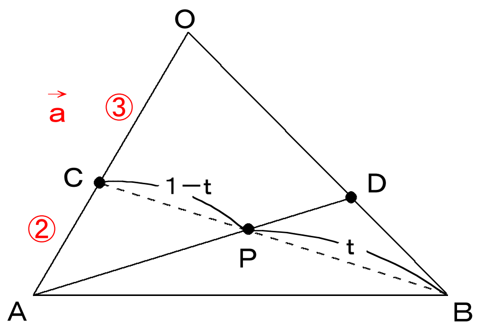
$$\overrightarrow{OP}=\frac{(1-t)\overrightarrow{OB}+t\,\overrightarrow{OC}}{t+(1-t)}$$

$$=(1-t)\vec{b}+\frac{3}{5}t\,\vec{a}$$

$$▲\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}=\frac{3}{5}\vec{a}$$

$$=\frac{3}{5}t\,\vec{a}+(1-t)\vec{b}\quad\cdots②$$

点Pを線分BC上で考える



3 ①＝②より，$(1-s)\vec{a}+\frac{2}{3}s\,\vec{b}=\frac{3}{5}t\,\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}$と$\vec{b}$は平行でなく，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$なので，　◀$\vec{a}$と$\vec{b}$は１次独立という。（資料参照）

$$\begin{cases}1-s=\dfrac{3}{5}t\\[2mm] \dfrac{2}{3}s=1-t\end{cases}$$

この連立方程式を解いて，$s=\frac{2}{3}$

$\overrightarrow{OP}$を①または②を利用して表すので，ｓ，ｔのどちらか片方だけ求めればよい。

4 $s=\frac{2}{3}$を①に代入して整理すると，$\underline{\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}}$