■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

１７

４章　関数の極限　２・関数の極限と連続性

３ 関数の連続性（その１）

（１／６）■　関数の連続　■

χ ＝aで連続か不連続かの判別

★知識の整理★

【１】関数の連続とは

関数 $f(\chi)$ が χ ＝aにおいて連続とは…

① $\lim_{\chi \to a} f(\chi)$ の値が存在する。　◀ $\chi \to a$ で極限値が存在する。

② $f(a)$ の値が存在する。

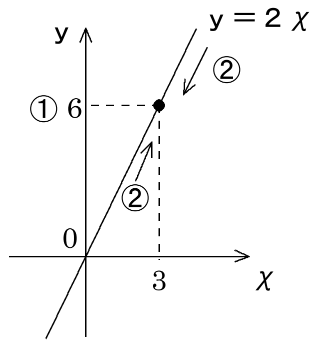
③ $\lim_{\chi \to a} f(\chi) = f(a)$ となる。

この３条件が同時に満たされるとき。

（例）　次の関数は χ ＝３で連続か？

＜連続する例＞

$f(\chi) = 2\chi$

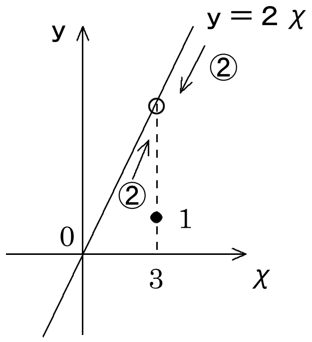


$$\begin{cases} ① & \lim_{\chi \to 3} 2\chi = 6 \\ ② & f(3) = 6 \\ ③ & \lim_{\chi \to 3} 2\chi = f(3) \end{cases}$$

より，連続である。

＜連続しない例＞

$$\begin{cases} \chi \neq 3 \text{ のとき，} & f(\chi) = 2\chi \\ \chi = 3 \text{ のとき，} & f(\chi) = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} ① & \lim_{\chi \to 3} 2\chi = 6 \\ ② & f(3) = 1 \\ ③ & \lim_{\chi \to 3} 2\chi \neq f(3) \end{cases}$$

より，連続でない。

【注】 χ ＝２なら連続である。

① $\lim_{\chi \to 2} 2\chi = 4$

② $f(2) = 4$

③ $f(2) = \lim_{\chi \to 2} 2\chi$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗ （前のページからのつづき）

２・関数の極限と連続性　ナビ

学習資料	《関数の連続性》

★知識の整理★

▼ 関数の連続性 ▼

関数 $f(x)$ において，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき，すなわち，

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続であるという．

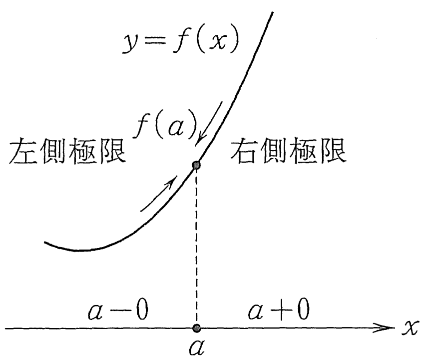
（説明）

関数 $f(x)$ において，その定義域内の x の値 a に対して，左側極限と右側極限が一致するとき，$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在する．また，その極限値が $f(a)$ に等しいとき，$x=a$ において関数 $f(x)$ は連続であるという．

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

これは〈図１〉のように $x=a$ の左側からの極限(左側極限)と右側からの極限(右側極限)が $x=a$ における値と等しくなることで関数 $f(x)$ が $x=a$ で『つながる(連続となる)』ことを意味する．



〈図１〉

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

■　関数の連続　■

◇《χ ＝aで連続か不連続かの判別》 **学力化**➡　　／　，

★解法の技術★【 １ 】

次の関数は　$\chi = 1$　で連続かどうかを調べよ。

(1)　$f(\chi) = |\,\chi - 1\,|$　　　(2)　$f(\chi) = \begin{cases} \dfrac{\chi - 1}{|\chi - 1|} & (\chi \neq 1) \\ 1 & (\chi = 1) \end{cases}$

【考え方】(1)　連続する場合は，「関数が連続するための３条件」を満たすことを示す。
また，連続しない χ の値があるときは，それも示しておく。

(2)　・連続しない場合は，
３条件のうちのどれが１つを満たさないことを示せばよい。

・絶対値の極限を求める場合，
右側からの極限と左側からの極限を調べる必要がある。

・$f(\chi)$ の近づく値が異なるときは，$\displaystyle\lim_{\chi \to a} f(\chi)$ は存在しない。

［答　　案］

(1)　$f(\chi) = |\,\chi - 1\,|$　〔$\chi = 1$〕

①・$\chi - 1 < 0$　すなわち　$\chi < 1$ のとき，
$|\,\chi - 1\,| = -(\chi - 1) = -\chi + 1$ であるから，

$$\lim_{\chi \to 1-0} f(x) = \lim_{\chi \to 1-0} |\chi - 1| = \lim_{\chi \to 1-0} (-\chi + 1) = 0$$

・$\chi - 1 > 0$　すなわち　$\chi > 1$ のとき，
$|\,\chi - 1\,| = \chi - 1$ であるから，

$$\lim_{\chi \to 1+0} f(x) = \lim_{\chi \to 1+0} |\chi - 1| = \lim_{\chi \to 1+0} (\chi - 1) = 0$$

よって，$\displaystyle\lim_{\chi \to 1-0} f(x) = \lim_{\chi \to 1+0} f(x)$ であるから，

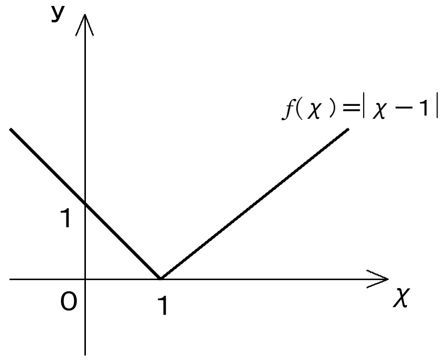
$$\lim_{\chi \to 1} f(x) = 0$$

◀極限値が存在する。

②　$f(1) = |\,1 - 1\,| = |\,0\,| = 0$

③　①と②より，$\displaystyle\lim_{\chi \to 1} f(x) = f(1)$ が成り立つ。

したがって，①，②，③より，
$f(\chi)$ は $\chi = 1$ において連続である。



（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗（前のページからのつづき）

(2) $f(\chi)=\begin{cases} \dfrac{\chi-1}{|\chi-1|} & (\chi\neq1) \\ 1 & (\chi=1) \end{cases}$

①・$\chi-1<0$　すなわち　$\chi<1$ のとき，

$|\chi-1|=-(\chi-1)=-\chi+1$ であるから，

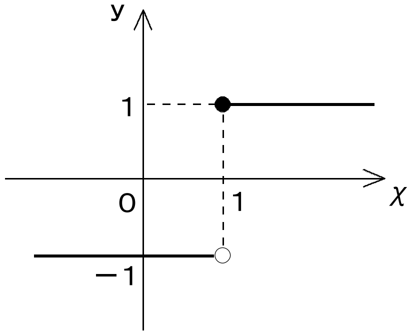
$$\lim_{\chi\to1-0}f(x)=\lim_{\chi\to1-0}\frac{\chi-1}{|\chi-1|}=\lim_{\chi\to1-0}\frac{\chi-1}{-\chi+1}=\lim_{\chi\to1-0}\frac{\chi-1}{-(\chi-1)}=-1$$

▲不定形

・$\chi-1>0$　すなわち　$\chi>1$ のとき，

$|\chi-1|=\chi-1$ であるから，

$$\lim_{\chi\to1+0}f(x)=\lim_{\chi\to1+0}\frac{\chi-1}{|\chi-1|}=\lim_{\chi\to1+0}\frac{\chi-1}{\chi-1}=1$$



よって，$\displaystyle\lim_{\chi\to1-0}f(x)\neq\lim_{\chi\to1+0}f(x)$ であるから，

$\displaystyle\lim_{\chi\to1}f(x)$ は存在しない。

◀極限値は存在しない。

②×（不要）

③ $\displaystyle\lim_{\chi\to1}f(x)$ が存在しないから，$\displaystyle\lim_{\chi\to1}f(x)=f(1)$ とはならない。

したがって，①，②，③より，

$f(\chi)$ は $\chi=1$ において不連続である。

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

◇《χ＝aで連続か不連続かの判別》学力化➡　／　，

★解法の技術★【２】

関数 $f(\chi)=[\sin\chi]$ について，

(1) $\chi=\dfrac{\pi}{2}$ で連続かどうかを調べよ。

(2) $\chi=-\dfrac{\pi}{2}$ で連続かどうかを調べよ。

ただし，［　］はガウス記号である。

【考え方】ガウス記号とは

［χ］は，実数χについて，χ以下の最大の整数を表す。このとき，［　］をガウス記号という。例えば，［１．２５］＝１，［－４．１］＝－５，［３］＝３。

［答　案］

(1) $f(\chi)=[\sin\chi]$　$\left(\chi=\dfrac{\pi}{2}\right)$

①$\chi\to\dfrac{\pi}{2}-0$　および　$\chi\to\dfrac{\pi}{2}+0$のとき，sinχは１より小さい値をとりながら，

１に限りなく近づくことから，

・$\displaystyle\lim_{\chi\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{\chi\to\frac{\pi}{2}-0}[\sin x]=0$

・$\displaystyle\lim_{\chi\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim_{\chi\to\frac{\pi}{2}+0}[\sin x]=0$

よって，$\displaystyle\lim_{\chi\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim_{\chi\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=0$であるから，

$\displaystyle\lim_{\chi\to\frac{\pi}{2}} f(x)=0$　◀極限値が存在する。

② $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left[\sin\dfrac{\pi}{2}\right]=[1]=1$　◀ガウス記号

③ ①と②より，$\displaystyle\lim_{\chi\to\frac{\pi}{2}} f(x)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

したがって，①，②，③より，

$f(\chi)$ は $\chi=\dfrac{\pi}{2}$ において不連続である。

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗（前のページからのつづき）

(2) $f(x) = [\sin x]$　$\left(x = -\frac{\pi}{2}\right)$

①$x \to -\frac{\pi}{2} - 0$　および　$x \to -\frac{\pi}{2} + 0$のとき，$\sin x$は-1より大きい値を

とりながら，-1に限りなく近づくことから，

・$\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}-0} [\sin x] = -1$

・$\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} [\sin x] = -1$

よって，$\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} f(x) = -1$であるから，

$\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = -1$　◀極限値が存在する。

②　$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1] = -1$　◀ガウス記号

③　①と②より，$\displaystyle\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$が成り立つ。

したがって，①，②，③より，

$f(x)$は$x = -\frac{\pi}{2}$において連続である。