

部分積分と同形利用

◇ 《部分積分法②' (同形利用型)》 学力化 → / .

★知識の整理★

【1】同形利用とは？

部分積分を繰り返すと、途中で、与えられた式と同じ式が現れるので、それを使って積分を続けることで、与式の積分をすることができる。

このような方法で部分積分する問題のタイプを「同形利用」とか「同形出現」という。

とにかく、具体的な問題を解きながら、「同形利用」とは、どのような手順で積分することなのかををつかむことが大切である。

【*】部分積分法の確認

同形利用では、部分積分法が必須ツールであるので、ここで確認しておこう。

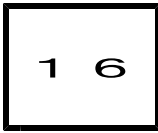
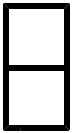
▼ 部分積分法 ▼

$$\cdot \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\left(\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \right)$$

* 実質的には1つの公式である。下の公式は微分の位置が反対になっているだけである。

* 部分積分法では、問題が2種類の積の積分であることを確認し、 $g'(x)$ が「微分の形」になるように式を書きかえることから始める。後は、公式を適用して、計算をするだけである。



— ●★解法の技術★の学習のしかた●—

- (1) 下の答案を学習し、解法プロセスを覚えましょう。／覚えたら、……
 (2) 模範解答を見ないで、次のページの★理解のチェック★の問題を解いてみましょう。
 (模範解答を見ながら答案を書いても力はずきません。一度、「解法プロセス」を頭の中に入れることが大切です。)

◇ 《部分積分法②' (同形利用型)》 学力化 → /

★解法の技術★

不定積分 $I = \int e^x \sin x dx$ を求めよ。【考え方】 **違う種類の関数の積**だから「部分積分法の公式」を使うことを考える。

$$\int \underbrace{f(x)g'(x)}_{\text{「微分の形」}} dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

* 「同形利用」型の問題であると、どこを見て判断するのか？

- ① 問題が、 $I = \sim$ で与えられていたら、ほぼ「同形利用」型問題であると
 考えてよい。
 ② 積分の途中で、与式と同じ形が出てきたら、まちがいなく「同形利用」型
 問題である。

* 「同形利用型」は「部分積分部分積分型」の特殊型である。

* いずれにせよ、積分の問題を解くときには、このようなタイプの解き方がある、
 ということを知っていることが大切でなのである。出くわしたら、いつでも使
 えるように…。

[答 案]

$$I = \int e^x \sin x dx$$

① (問題の一方を「微分の形」で表す) ◀①の部分は、答案には書かなくてもよい。

2つの関数のそれぞれを微分すると、

$$(e^x)' = e^x \quad \dots f(x), \quad (\sin x)' = \cos x \quad \dots g'(x)$$

微分しても簡単にならないのは $\sin x$ なので、こちらを「微分の形」で表すために
 積分すると $(-\cos x)$ となるから、 $\int e^x \sin x dx$ は $\int e^x (-\cos x)' dx$ と表せる。【注】 この問題では、 e^x を $(e^x)'$ と微分の形にして計算しても、答は同じになる。
 (後で、実際に計算してみる。)

(次のページへつづく) ↗

➔ (前のページからのつづき)

2 (部分積分法の公式を作り, 右辺を計算する)

$$I = \int e^x \cdot (-\cos \chi)' dx = e^x \cdot (-\cos \chi) - \int (e^x)' \cdot (-\cos \chi) dx$$

▲部分積分法の公式

$$= -e^x \cos \chi + \int e^x \cos \chi dx \quad \dots \textcircled{1}$$

▲直接には積分できない(2種類の関数の積)。

→ 部分積分法を利用する。

ここで, $\int e^x \cos \chi dx$ に部分積分法を適用して,

$$\int e^x \cdot (\sin \chi)' dx = e^x \cdot \sin \chi - \int (e^x)' \cdot \sin \chi dx$$

▲ I と同じ位置を「微分の形」で表す

$$= e^x \sin \chi - \int e^x \sin \chi dx$$

$$= e^x \sin \chi - I \quad \dots \textcircled{2} \quad \blacktriangle \text{与式と同じ形だから, これを } I \text{ とおきかえる。}$$

3 (同形利用)

②を①の後半部に代入して,

$$I = -e^x \cos \chi + (e^x \sin \chi - I)$$

$$2I = e^x (\sin \chi - \cos \chi) \quad \dots \textcircled{3}$$

◀ I を左辺へ移項し,

右辺は共通因数を括りだし, 式を整理する。

$$I = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^x (\sin \chi - \cos \chi) + C}} \quad (C \text{ は積分定数})$$

《 e^x を「微分の形」にした場合》

$$I = \int (e^x)' \sin \chi dx = e^x \cdot \sin \chi - \int e^x \cdot (\sin \chi)' dx$$

$$= e^x \cdot \sin \chi - \int e^x \cdot \cos \chi dx \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで, $\int e^x \cdot \cos \chi dx$ に部分積分法を適用して,

$$\int (e^x)' \cdot \cos \chi dx = e^x \cdot \cos \chi - \int e^x \cdot (\cos \chi)' dx$$

$$= e^x \cdot \cos \chi - \int e^x \cdot (-\sin \chi) dx$$

$$= e^x \cdot \cos \chi + \int e^x \cdot \sin \chi dx$$

$$= e^x \cdot \cos \chi + I \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入して,

$$I = e^x \cdot \sin \chi - (e^x \cdot \cos \chi + I)$$

= ~ 以下, ③ ($\sin \chi$ を「微分の形」で表したときの解き方) と同じ。