部分積分と同形利用

◇《部分積分法②’（同形利用型）》 **学力化** ➡　　／　，

★知識の整理★

【１】同形利用とは？

部分積分を繰り返すと，途中で，与えられた式と同じ式が現れるので，それを使って積分を続けることで，与式の積分をすることができる。

このような方法で部分積分する問題のタイプを「同形利用」とか「同形出現」という。

とにかく，具体的な問題を解きながら，「同形利用」とは，どのような手順で積分することなのかをつかむことが大切である。

【＊】部分積分法の確認

同形利用では，部分積分法が必須ツールであるので，ここで確認しておこう。

▼　部分積分法　▼

・$\int f(\chi)g'(\chi)dx = f(\chi)g(\chi) - \int f'(\chi)g(\chi)dx$

（　$\int f'(\chi)g(\chi)dx = f(\chi)g(\chi) - \int f(\chi)g'(\chi)dx$　）

＊実質的には1つの公式である。下の公式は微分の位置が反対になっているだけである。

＊部分積分法では，問題が２種類の積の積分であることを確認し，$g'(\chi)$ が「微分の形」になるように式を書きかえることから始める。後は，公式を適用して，計算をするだけである。

●★解法の技術★の学習のしかた●
(1)　下の答案を学習し，解法プロセスを覚えましょう。／覚えたら，．．．．．
(2)　模範解答を見ないで，次のページの★理解のチェック★の問題を解いてみましょう。
（模範解答を見ながら答案を書いても力はつきません。一度，「解法プロセス」を頭の中に入れることが大切です。）

◇《部分積分法②'（同形利用型）》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

不定積分 $I=\int e^{x}\sin x\,dx$ を求めよ。

【考え方】**違う種類の関数の積**だから「部分積分法の公式」を使うことを考える。

$$\int f(x)\underbrace{g'(x)}_{\text{「微分の形」}}dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

＊「同形利用」型の問題であると，どこを見て判断するのか？

① 問題が，I ＝～で与えられていたら，ほぼ「同形利用」型問題であると考えてよい。

② 積分の途中で，与式と同じ形が出てきたら，まちがいなく「同形利用」型問題である。

＊「同形利用型」は「部分積分部分積分型」の特殊型である。

＊いずれにせよ，積分の問題を解くときには，このようなタイプの解き方がある，ということを知っていることが大切なのである。出くわしたら，いつでも使えるように…。

［答　　案］

$I=\int e^{x}\sin x\,dx$

1 （問題の一方を「微分の形」で表す）　◀1の部分は，答案には書かなくてもよい。

２つの関数のそれぞれを微分すると，

$(e^{x})'=e^{x}$　$\cdots f(x)$，　　$(\sin x)'=\cos x$　$\cdots g'(x)$

微分しても簡単にならないのは$\sin x$なので，こちらを「微分の形」で表すために積分すると$(-\cos x)$となるから，$\int e^{x}\sin x\,dx$ は $\int e^{x}(-\cos x)'dx$ と表せる。

【注】この問題では，e^{x} を $(e^{x})'$ と微分の形にして計算しても，答は同じになる。
（後で，実際に計算してみる。）

（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

2　（部分積分法の公式を作り，右辺を計算する）

$$I=\int e^x\cdot(-\cos x)'dx=e^x\cdot(-\cos x)-\int(e^x)'\cdot(-\cos x)dx$$

▲部分積分法の公式

$$=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx\quad\cdots①$$

▲直接には積分できない（2種類の関数の積）。
→ 部分積分法を利用する。

ここで，$\int e^x\cos x\,dx$ に部分積分法を適用して，

$$\int e^x\cdot(\sin x)'dx=e^x\cdot\sin x-\int(e^x)'\cdot\sin x\,dx$$

▲ I と同じ位置を「微分の形」で表す

$$=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$$

$$=e^x\sin x-I\quad\cdots②$$

▲与式と同じ形だから，これを I とおきかえる。

3　（同形利用）

②を①の後半部に代入して，

$$I=-e^x\cos x+(e^x\sin x-I)$$

$$2I=e^x(\sin x-\cos x)\quad\cdots③$$

◀ I を左辺へ移項し，
右辺は共通因数を括りだし，式を整理する。

$$I=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

（Cは積分定数）

《e^x を「微分の形」にした場合》

$$I=\int(e^x)'\sin x\,dx=e^x\cdot\sin x-\int e^x\cdot(\sin x)'dx$$

$$=e^x\cdot\sin x-\int e^x\cdot\cos x\,dx\quad\cdots①$$

ここで，$\int e^x\cdot\cos x\,dx$ に部分積分法を適用して，

$$\int(e^x)'\cdot\cos x\,dx=e^x\cdot\cos x-\int e^x\cdot(\cos x)'dx$$

$$=e^x\cdot\cos x-\int e^x\cdot(-\sin x)dx$$

$$=e^x\cdot\cos x+\int e^x\cdot\sin x\,dx$$

$$=e^x\cdot\cos x+I\quad\cdots②$$

②を①に代入して，

$$I=e^x\cdot\sin x-(e^x\cdot\cos x+I)$$

＝～以下，③（sin$x$ を「微分の形」で表したときの解き方）と同じ。