部分積分法を２回適用するタイプ

◇《部分積分法②（部分積分＆部分積分型）》学力化➡　／　，

★解法の技術★

次の不定積分を求めよ。

$$\int x^2 e^{2x}dx$$

【考え方】部分積分法の公式を適用したとき，右辺に直接には積分できない部分（２種類の関数の積）が現れるタイプの問題である。
このときは，この部分に再度，部分積分法を適用して，その結果を与式に組み込めばよい。

［答　案］

$$\int x^2 e^{2x}dx$$

◀ちがう種類の関数の積⟶部分積分法

1　（問題の一方を「微分の形」で表す）　◀1の部分は，答案には書かなくてもよい。

２つの関数のそれぞれを微分すると，

$(x^2)'=2x$　$\cdots f(x)$，　$(e^{2x})'=2e^{2x}$　$\cdots g'(x)$　◀$g'(x)$ 合成関数の微分法

微分しても簡単にならないのは e^{2x} なので，こちらを「微分の形」で表すために積分すると $\frac{1}{2}e^{2x}$ となるから，$\int x^2 e^{2x}dx$ は $\int x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$ と表せる。

◀$f(\mathrm{a}x+\mathrm{b})$の不定積分
$$\int e^{\mathrm{a}x+\mathrm{b}}dx=\frac{1}{\mathrm{a}}e^{\mathrm{a}x+\mathrm{b}}+\mathrm{C}$$

2　（部分積分法の公式を作り，右辺を計算する）

$$\int x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx = x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int (x^2)'\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$$
◀部分積分法の公式

$$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int x e^{2x}dx$$

▲直接には積分できない（2種類の関数の積）→部分積分法

ここで，$\int x e^{2x}dx$ に再度，部分積分法を適用して，

$$\int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int x'\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$$
◀部分積分法の公式

$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx$$
◀$x'=1$

（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

$$=\frac{1}{2}\chi e^{2\chi}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2\chi}+C$$ （Cは積分定数）

$$=\frac{1}{2}\chi e^{2\chi}-\frac{1}{4}e^{2\chi}+C$$

$$=\frac{1}{2}\chi^{2}e^{2\chi}-\left(\frac{1}{2}\chi e^{2\chi}-\frac{1}{4}e^{2\chi}+C\right)$$ （Cは積分定数）

$$=\frac{1}{2}\chi^{2}e^{2\chi}-\frac{1}{2}\chi e^{2\chi}+\frac{1}{4}e^{2\chi}+C$$

$$=\underline{\frac{1}{4}e^{2\chi}(2\chi^{2}-2\chi+1)+C}$$