１４

第６章　積分法　１・不定積分

2 置換積分法と部分積分法（その８）

（１／１０）■　部分積分法①(基本型)　■

部分積分法とは

★知識の整理★

【１】積の関数の積分

積で表された関数を積分したいときには，「部分積分法」を使うとうまくいくことが多い！

▲「多い」のであって，積で表されている関数ならすべてをこの方法でやるというわけではない。
前に学んだ「置換積分法」でやった方が簡単な場合もある。

▼　部分積分法　▼

・$\displaystyle\int f(\chi)g'(\chi)dx=f(\chi)g(\chi)-\int f'(\chi)g(\chi)dx$

（$\displaystyle\int f'(\chi)g(\chi)dx=f(\chi)g(\chi)-\int f(\chi)g'(\chi)dx$　）

＊実質的には１つの公式である。下の公式は微分の位置が反対になっているだけである。

【注意】このような公式を見たところで何をしたらいいのかわからないので，
具体的な問題を解きながら公式の意味を理解すること！（次のページで学習）
その後で，なぜそんなことをしていいのかについての証明を理解すること。

【２】「部分積分法」の証明

部分積分法は，積の微分公式から導かれる。

$\{f(\chi)g(\chi)\}'=f'(\chi)g(\chi)+f(\chi)g'(\chi)$　　◀積の微分公式

両辺をχで積分すると，

$$\int\{f(\chi)g(\chi)\}'dx=\int\{f'(\chi)g(\chi)+f(\chi)g'(\chi)\}dx$$

$$f(\chi)g(\chi)=\int f'(\chi)g(\chi)dx+\int f(\chi)g'(\chi)dx$$

◀たとえば，$\displaystyle\int\{\chi^2\}'dx=\chi^2$

移項して，

$$\int f(\chi)g'(\chi)dx=f(\chi)g(\chi)-\int f'(\chi)g(\chi)dx$$

（または，$\displaystyle\int f'(\chi)g(\chi)dx=f(\chi)g(\chi)-\int f(\chi)g'(\chi)dx$　）

公式を適用するだけで答が求まるタイプ①

◇**三角関数**や**指数関数**を含む**積**の積分である。

●★解法の技術★の学習のしかた●

(1)　下の答案を学習し，解法プロセスを覚えましょう。／覚えたら，.....
(2)　模範解答を見ないで，次のページの★理解のチェック★の問題を解いてみましょう。
（模範解答を見ながら答案を書いても力はつきません。一度，「解法プロセス」を頭の中に入れることが大切です。）

◇《部分積分法①(基本型)　**三角関数／指数関数**》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sin x\,dx$　　　　(2) $\int xe^{x}dx$

【考え方】**違う種類の関数の積**だから「部分積分法の公式」を使うことを考える。

$$\int f(x)\underbrace{g'(x)}_{「微分の形」}dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

問題の２つの関数をそれぞれ微分してみて，簡単にならない方を積分して「微分の形」に書きかえる。

［答　　案］

(1) $\int x\sin x\,dx$

1　（問題の一方を「微分の形」で表す）　◀1の部分は，答案には書かなくてもよい。

２つの関数のそれぞれを微分すると，

$(x)'=1$　$\cdots f(x)$，　$(\sin x)'=\cos x$　$\cdots g'(x)$

微分しても簡単にならないのは$\sin x$なので，こちらを「微分の形」で表すために積分すると$(-\cos x)$となるから，$\int x\sin x\,dx$ は $\int x(-\cos x)'dx$ と表せる。

2　（部分積分法の公式を作り，右辺を計算する）

$$\int x(-\cos x)'dx=x(-\cos x)-\int x'(-\cos x)dx$$　◀部分積分法の公式

$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$

$$=-x\cos x+\sin x+C$$　（Cは積分定数）

（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

(2) $\int \chi e^{x} dx$

1 （問題の一方を「微分の形」で表す）　◀1の部分は，答案には書かなくてもよい。

２つの関数のそれぞれを微分すると，

$(\chi)' = 1$ $\cdots f(\chi)$，　$(e^{x})' = e^{x}$ $\cdots g'(\chi)$

微分しても簡単にならないのはe^{x} なので，こちらを「微分の形」で表すために積分すると(e^{x})となるから，$\int \chi e^{x} dx$ は$\int \chi (e^{x})' dx$ と表せる。

2 （部分積分法の公式を作り，右辺を計算する）

$$\int \chi (e^{x})' dx = \chi (e^{x}) - \int \chi' (e^{x}) dx$$ ◀部分積分法の公式

$$= \chi e^{x} - \int e^{x} dx$$

$$= \chi e^{x} - e^{x} + C$$ （Cは積分定数）

$$= e^{x}(\chi - 1) + C$$ ◀共通因数e^{x} でくくる。