合成関数の微分法

◇《合成関数の微分法》学力化➡　／　,

★解法の技術★

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(3\chi-2)^2$　　(2)　$y=(\chi^2-2\chi-3)^3$

(3)　$y=\dfrac{1}{(\chi+2)^3}$　　(4)　$y=\dfrac{2}{(\chi^2-\chi+1)^2}$

【考え方】

★合成関数とは？

２つの関数 $y=f(t)$，$t=g(\chi)$ の合成関数 $y=f(g(\chi))$ は，χ の関数と考えることができる。

(例)　$y=(\chi^2+1)^8$は，$t=\chi^2+1$ と $y=t^8$の合成関数である。

▼　合成関数の微分法　▼

２つの関数 $y=f(t)$，$t=g(\chi)$ がともに微分可能なとき，合成関数 $y=f(g(\chi))$ も微分可能で，次の公式が成り立つ。

$$\frac{dy}{d\chi}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\chi}$$

$\uparrow$　$\uparrow$

$\boxed{2}\cdot\boxed{3}$

【注】上の公式の証明はできなくともよい。（証明は教科書を参照）

この公式の右辺をｄｔで約分すると，左辺と等しくなるというイメージをもつこと。

上の問題のような合成関数を直接に微分するのではなく，

$\boxed{1}$　χ の式をｔと置き，

$\boxed{2}$　ｙをｔで微分し，

$\boxed{3}$　その式に，ｔを χ で微分した式をかけておく。　◀おきかえたら必ず行う操作！

$\boxed{4}$　そのあとで，χ の式を整理すると，合成関数の導関数が求まる。

(例)　$y=(\chi^2+1)^8$ において，$t=\chi^2+1$ とおくと，$y=t^8$ であるから，

$$\frac{dy}{d\chi}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\chi}$$
$$=8t^7\cdot(2\chi)$$
$$=8(\chi^2+1)^7\cdot(2\chi)$$
$$=16\chi(\chi^2+1)^7$$

（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

［答　　案］

(1)　$y=(3\chi-2)^2$ において，$t=3\chi-2$ とおくと，$y=t^2$ であるから，

$$\frac{dy}{d\chi}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\chi}$$　◀合成関数の微分法

$=2t\cdot(3)$

$=2(3\chi-2)\cdot(3)$　◀ t を戻す。

$=6(3\chi-2)$

(2)　$y=(\chi^2-2\chi-3)^3$ において，$t=\chi^2-2\chi-3$ とおくと，$y=t^3$ であるから，

$$\frac{dy}{d\chi}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\chi}$$　◀合成関数の微分法

$=3t^2\cdot(2\chi-2)$

$=3(\chi^2-2\chi-3)^2\cdot(2\chi-2)$　◀ t を戻す。

$=6(\chi^2-2\chi-3)^2(\chi-1)$

(3)　$y=\dfrac{1}{(\chi+2)^3}$ において，$t=\chi+2$ とおくと，$y=\dfrac{1}{t^3}$ であるから，

$$\frac{dy}{d\chi}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\chi}$$　◀合成関数の微分法

$=-\dfrac{3}{t^4}\cdot(1)$

$=-\dfrac{3}{(\chi+2)^4}$　◀ t を戻す。

◀ $y=t^{-3}$

$y'=-3t^{-4}$

$=-3\cdot\dfrac{1}{t^4}$

$=-\dfrac{3}{t^4}$

(4)　$y=\dfrac{2}{(\chi^2-\chi+1)^2}$ において，$t=\chi^2-\chi+1$ とおくと，$y=\dfrac{2}{t^2}$ であるから，

$$\frac{dy}{d\chi}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\chi}$$　◀合成関数の微分法

$=-\dfrac{4}{t^3}\cdot(2\chi-1)$

$=-\dfrac{4(2\chi-1)}{(\chi^2-\chi+1)^3}$　◀ t を戻す。

◀ $y=2t^{-2}$

$y'=-4t^{-3}$

$=-4\cdot\dfrac{1}{t^3}$

$=-\dfrac{4}{t^3}$