■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

第２章　複素数平面　２・平面図形と複素数

1 平面図形と複素数（その５）

（１／６）■　２直線のなす角③　■

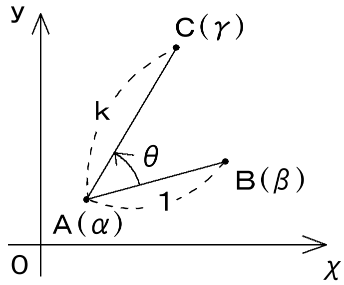
一直線，垂直になる条件

★知識の整理★

【１】原点のまわりの回転

複素数平面上の異なる３点Ａ(α)，Ｂ(β)，Ｃ(γ)に対して，半直線ＡＢから半直線ＡＣへ測った角を∠ＢＡＣと表す。

∠ＢＡＣ＝θで，ＡＣ＝ｋＡＢのとき，点Ｃは，点Ｂを点Ａのまわりにθだけ回転し，点Ａからの距離をｋ倍した点であるから，次の式が成り立つ。



$$\gamma-\alpha=k(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)\quad\cdots①$$

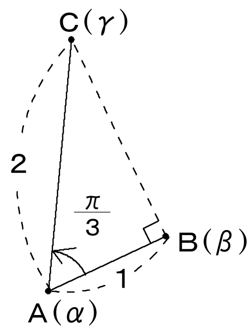
（例）　３点Ａ(α)，Ｂ(β)，Ｃ(γ)に対して，

$$\gamma-\alpha=(1+\sqrt{3}\,i)(\beta-\alpha)$$

が成り立つとき，

$$\gamma-\alpha=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)$$

と変形できるから，点Ｃは，点Ｂを点Ａのまわりに$\frac{\pi}{3}$だけ回転し，点Ａからの距離を２倍した点であることがわかる。



【２】商の極形式

３点Ａ(α)，Ｂ(β)，Ｃ(γ)が与えられたとき，①より，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=k(\cos\theta+i\sin\theta)\quad\cdots②$$

【３】Ａ，Ｂ，Ｃが一直線上にある条件

３点Ａ(α)，Ｂ(β)，Ｃ(γ)が一直線上にあるのは，$\theta=0$，または，$\theta=\pi$のときであるから，上の②より，次のことがいえる。

３点Ａ，Ｂ，Ｃが一直線上　$\Longleftrightarrow$　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$が実数

たとえば，$z=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=k(\cos\theta+i\sin\theta)$とおくと，

(1)　$\theta=0$のとき，

$$z=k(\cos 0+i\sin 0)=k(1+0)=k\quad（実数）$$

(2)　$\theta=\pi$のとき，

$$z=k(\cos\pi+i\sin\pi)=k(-1+0)=-k\quad（実数）$$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

（前のページからのつづき）

【４】２直線ＡＢ，ＡＣが垂直になる条件

２直線ＡＢ，ＡＣが垂直になるのは，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，または，$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$のときであるから，上の②より，次のことがいえる。

２直線ＡＢ，ＡＣが垂直　$\Longleftrightarrow$　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$が純虚数

たとえば，$z=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=k(\cos\theta+i\sin\theta)$とおくと，

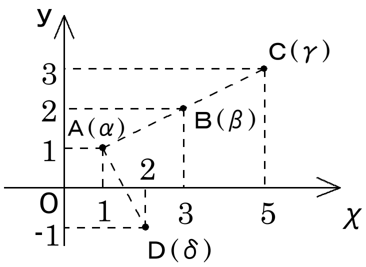
(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき，

$$z=k\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=k(0+i)=ki\quad（純虚数）$$

(2)　$\theta=-\dfrac{\pi}{2}$のとき，

$$z=k\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$=k\{0+(-i)\}=-ki\quad（純虚数）$$

（例）　$\alpha=1+i$，$\beta=3+2i$，$\gamma=5+3i$，$\delta=2-i$の表す点を，それぞれ，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄとするとき，それぞれどのような位置関係にあるか調べてみよう。



$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{4+2i}{2+i}=2\quad（実数）$$

したがって，３点Ａ，Ｂ，Ｃは一直線上にある。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1-2i}{2+i}$$
$$=\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i-4i-2}{5}=\frac{-5i}{5}=-i\quad（純虚数）$$

したがって，２直線ＡＢ，ＡＤは垂直である。

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

◇《一直線，垂直になる条件》**学力化**➡　／　，

★解法の技術★

> $\alpha=-1-i$，$\beta=i$，$\gamma=a-2i$ とし，複素数平面上の３点をＡ(α)，Ｂ(β)，Ｃ(γ)とする。ただし，ａは実数の定数とする。
> (1) 点をＡ，Ｂ，Ｃが一直線上にあるように，ａの値を定めよ。
> (2) ２直線ＡＢ，ＡＣが垂直であるように，ａの値を定めよ。

【考え方】複素数平面上において，異なる３点Ａ(α)，Ｂ(β)，Ｃ(γ)がある。このとき，

３点Ａ，Ｂ，Ｃが一直線上　$\iff$　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数

２直線ＡＢ，ＡＣが垂直　$\iff$　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

よって，あらかじめ，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ をａ＋ｂi の形で表しておき，そのあとで(1)，(2)を解く。

◀$z=x+yi$ において，$y=0$ならば，zは実数　$x=0$かつ$y\neq 0$ならば　zは純虚数

［答　案］

Ａ(α)＝Ａ$(-1-i)$，Ｂ(β)＝Ｂ(i)，Ｃ(γ)＝Ｃ$(a-2i)$より，
３点Ａ，Ｂ，Ｃは，全て異なることはあきらかである。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(a-2i)-(-1-i)}{i-(-1-i)}=\frac{a+1-i}{1+2i}$$

$$=\frac{(a+1-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{a+1-i-2ai-2i-2}{1+4}=\frac{(a-1)-(2a+3)i}{5}$$

$$=\frac{a-1}{5}-\frac{2a+3}{5}i \quad \cdots①$$

▲分母の実数化

(1)　３点Ａ，Ｂ，Ｃが一直線上にあるための条件は，
①が実数となることであるから，
$2a+3=0$　より，
$\underline{a=-\dfrac{3}{2}}$

(2)　２直線ＡＢ，ＡＣが垂直であるための条件は，
①が純虚数となることであるから，
$a-1=0$　かつ　$2a+3\neq 0$　より，
$\underline{a=1}$