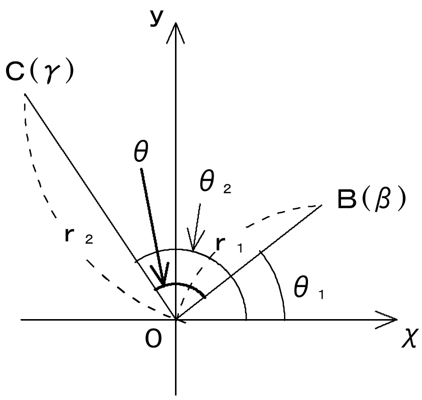
■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

２直線のなす角

★知識の整理★

【１】原点のまわりの回転

複素数平面上の点Ｂ(β)を原点のまわりにθだけ回転した点Ｃ(γ)は，どのように表せるかを調べてみよう。



$\beta =$ r$_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$\gamma =$ r$_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

とすると，

∠ＢＯＣ＝$\theta_2 - \theta_1$

ここで，極形式のわり算を考えると，極形式のわり算では偏角はひき算になるから，

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{r_2}{r_1}\{\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\sin(\theta_2 - \theta_1)\}$$

◀絶対値はわり算，偏角はひき算

⬆この部分が∠ＢＯＣ⬆

よって，

∠ＢＯＣ＝$\arg\dfrac{\gamma}{\beta}$　（$\dfrac{\gamma}{\beta}$の偏角）である。

（▲$\dfrac{\gamma}{\beta}$を極形式で表すと，その偏角が∠ＢＯＣになるという意味。）

【２】点αのまわりの回転

右図のように，点Ａ(α)が原点にくるように$-\alpha$だけ平行移動して考えると，

Ｂ’($\beta' = \beta - \alpha$)

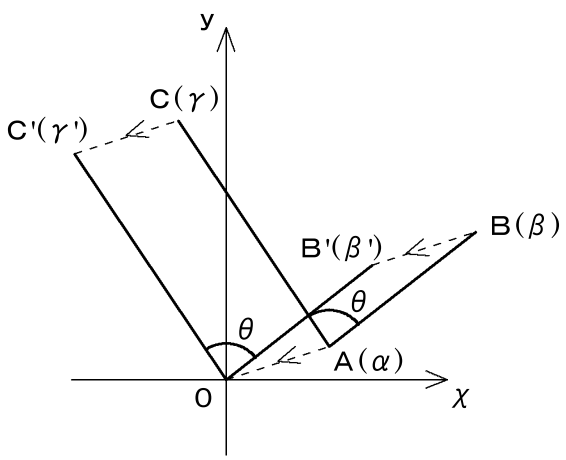
Ｃ’($\gamma' = \gamma - \alpha$)

とする。

∠Ｂ’ＯＣ’＝∠ＢＡＣなので，

∠Ｂ’ＯＣ’を求めてもよい。

よって，



$$∠Ｂ’ＯＣ’ = \arg\frac{\gamma'}{\beta'}$$

$$= \arg\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\therefore ∠ＢＡＣ = \arg\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

極形式　r$(\cos\theta + i\sin\theta)$

⬆　⬆

ここが求める∠ＢＡＣ

（▲∠ＢＡＣは，$\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$の計算結果を極形式になおしたときの偏角である，という意味）

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

6

第２章　複素数平面　２・平面図形と複素数

１ 平面図形と複素数（その５）

（２／９）■　２直線のなす角①　■

◇《２直線のなす角》学力化➡　　／　，

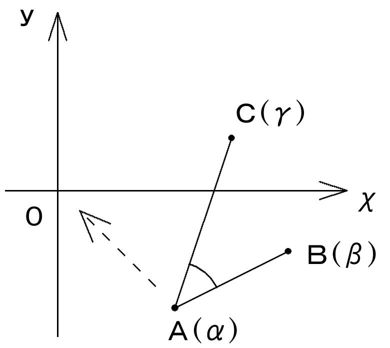
★解法の技術★

> 複素数平面上に３点Ａ（２－２i），Ｂ（４－i），Ｃ（３＋i）があるとき，∠ＢＡＣの大きさを求めよ。

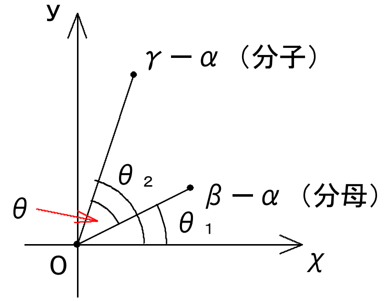
【考え方】1 ∠ＢＡＣの頂点Ａが原点になるように平行移動した２つの複素数の商を
2 極形式になおしたときの
3 偏角が∠ＢＡＣの大きさである。

［答　　案］

$\alpha=2-2i$，$\beta=4-i$，$\gamma=3+i$ とすると，　◀複素数の定義



⇒



▲Ａが原点になるように各々の点を平行移動した。
▲θを求める。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(3+i)-(2-2i)}{(4-i)-(2-2i)}=\frac{1+3i}{2+i}$$　◀2つの複素数の商

$$=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2+3+6i-i}{4+1}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$　◀分母の実数化

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$　◀ $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$　【注２】

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$　◀極形式へ

よって，$\angle\mathrm{BAC}=\left|\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\frac{\pi}{4}$　【注１】

【注１】$\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ を計算すると，偏角は $-\frac{\pi}{4}$ となるが，∠ＢＡＣは絶対値をとるので，$\frac{\pi}{4}$ と答える。

→「青チャート」ｐ３５～ｐ３６参照

【注２】$a+bi$ の形の複素数を極形式になおすために絶対値と偏角が必要であるから，$a+bi$ から絶対値を（　）外に割り出す。