■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

方程式　$z^n=\alpha$ の解

◇《方程式　$z^n=\alpha$ の解》 学力化➡　　／　，

★解法の技術★

> 方程式　$z^3=8i$ を解け。

【考え方】次の手順で考える。

1. 解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　[$r>0$] とし
方程式　$z^3=8i$ の左辺と右辺を極形式で表す。
2. 両辺の絶対値と偏角を比較して，
z の絶対値 r と偏角 θ の値を求める。
3. θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲にあるものを書き上げる。

［答　　案］

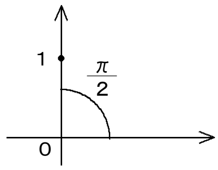
1　（方程式 z を極形式で表す）

・解を，　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　[$r>0$]　…(A)　とすると，
　　　　$z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$　…①　　◀ド・モアブルの定理

・また，　$8i=8\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$　…②　　◀$8i$ を極形式で表す。

①＝②より，　　◀ $|8i|=\sqrt{0^2+8^2}=\sqrt{64}=8$

$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=8\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$　…③　　◀ $z^3=8i$ の極形式



2　（r と θ の値を求め，z の一般式を求める）

③の両辺の絶対値と偏角を比較すると，

　$r^3=8$　　$r>0$ より，　$r=2$

　$3\theta=\dfrac{\pi}{2}+2\pi\times k$　（k は整数）より，　$\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{3}\pi\times k$

これらを(A)に代入して，

$z=2\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{3}\pi\times k\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{3}\pi\times k\right)\right\}$　…④　　◀方程式の解 z の一般式

3　（条件を満たす k の値を定め，k の値のそれぞれの場合について z の値を求める）

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると，

$$0\leqq\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi\times k<2\pi$$

$$-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{2}{3}\pi\times k<\frac{11}{6}\pi$$

$$-\frac{1}{4}\leqq k<\frac{11}{4}$$

より，　$k=0,\ 1,\ 2$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

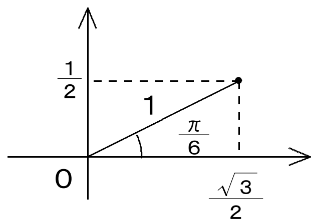
（前のページからのつづき）

④において，

k＝０のとき， $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

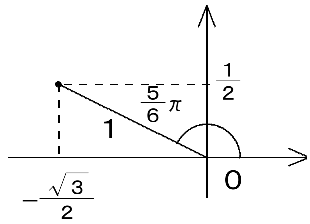
$=\sqrt{3}+i$



k＝１のとき， $z=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

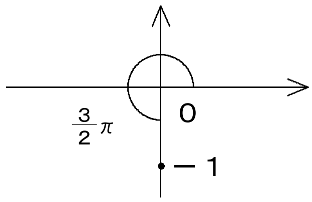
$=-\sqrt{3}+i$



k＝２のとき， $z=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

$=2(0-i)$

$=-2i$



4 （方程式 $z^3=8i$ の解をまとめる）

したがって，求める解は，

$z=\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ -2i$