■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

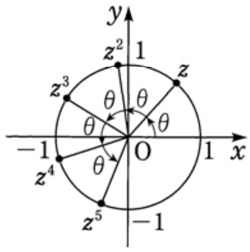
ｎ乗の計算

★知識の整理★

【１】ド・モアブルの定理

絶対値１の複素数 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ の表す点は，原点を中心とする半径１の円周上にある。このとき，複素数 z に α を掛けた αz は，点 z を原点のまわりに角 θ だけ回転した点を表す。

◀要するに
複素数 α をかけることは
複素数zの表す点を
回転させることである。



ここで，$z=\alpha$ の場合を考えてみよう。

$z=\alpha$ のとき，$\alpha z=\alpha^2$ となり，α^2 は点 α を原点を中心として角 θ だけ回転させたものであるから $\arg\alpha^2=\theta+\theta=2\theta$ であり，$|\alpha^2|=1$ であるから，

$$\alpha^2=\cos2\theta+i\sin2\theta$$

と表される。同様に，$\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha$，$\arg\alpha^3=2\theta+\theta=3\theta$ であり，$|\alpha^3|=1$ であるから，

$$\alpha^3=\cos3\theta+i\sin3\theta$$

と表される。

このことを繰り返すと，正の整数 n に対して，次のことが成り立つ。

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \quad \cdots\cdots\cdots①$$

★

絶対値が１の複素数 $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ に対して，

$$\frac{1}{\alpha}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$

◀【注】を参照

が成り立つから，正の整数 n に対して　$\alpha^{-n}=\dfrac{1}{\alpha^n}$ と定めると，①は n が負の整数のときも成り立つ。

また，$\alpha^0=1$ と定めると，次の **ド・モアブルの定理** が成り立つ。

▼　ド・モアブルの定理　▼

ｎが整数のとき，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

【注】$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$1=1+0i=\cos0+i\sin0$ であるから，複素数の商から，

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{1}\{\cos(0-\theta)+i\sin(0-\theta)\}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

１５

第２章　複素数平面　１・複素数平面

３ ド・モアブルの定理（その１）

（２／５）■　ド・モアブルの定理　■

◇《複素数のｎ乗》**学力化**➡　　／　，

★解法の技術★

（１＋$\sqrt{3}\,i$）^{12} を計算せよ。

【考え方】複素数を累乗するときは，　次の手順で計算する。

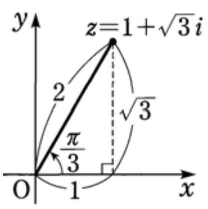
1 複素数をを極形式で表し，

2 両辺を累乗し，

2 ド・モアブルの定理を用いて，右辺を計算する。

［答　　案］

1 複素数を極形式で表すと，



$$1+\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

2 両辺を１２乗すると，

$$(1+\sqrt{3}\,i)^{12}=2^{12}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{12}$$

◀ $(ab)^2=a^2b^2$

3 ド・モアブルの定理を用いて，右辺を計算すると，

$$与式=2^{12}\left(\cos 12\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin 12\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2^{12}(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)$$

$$=4096\cdot(1+0)$$

◀ $\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求める

$$=\underline{4096}$$