

複素数を極形式で表す

★知識の整理★

【1】複素数の極形式

複素数平面上で、0でない複素数 $z=a+bi$ を表す点をPとする。

このとき、右の図のように、OPの長さを r 、OPが実軸の正の向きとなす角を θ とすると、

$$a=r \cos \theta, \quad b=r \sin \theta$$

となる。よって、複素数 z は、次の形で表される。

$$z=r(\cos \theta+i \sin \theta) \quad (r>0)$$

これを、複素数 z の **極形式** という。

r は、 z の絶対値 $|z|$ に等しい。すなわち、

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

である。

また、角 θ を z の **偏角** といい、 $\arg z$ で表す。

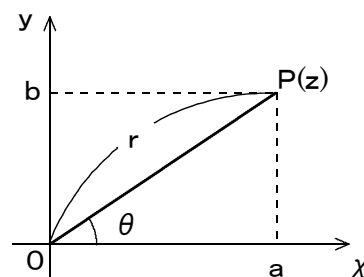
【注】 \arg は、argument(偏角)の略で、「アーギュメント」と読む。

偏角 θ は、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲ではただ1通りに定まる。

複素数 z の偏角は、その1つを θ とすると、一般に

$$\theta=2\pi \times n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

と表される。

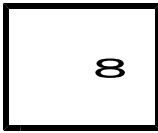
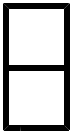


▼ 複素数の極形式 ▼

$$z \neq 0 \text{ のとき, } z=a+bi=r(\cos \theta+i \sin \theta)$$

$$\text{ただし, } r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \cos \theta=\frac{a}{r}, \quad \sin \theta=\frac{b}{r}$$

【注】 $z=0$ の場合、 $r=0$ であるが、偏角は定まらない。



◇ 《複素数を極形式で表す》 **学力化** → /

★解法の技術★

次の複素数を極形式で表せ。

$$z = \sqrt{3} + i$$

【考え方】 $z \neq 0$ のとき, $z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\text{ただし, } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

★複素数を極形式で表すには,

- 0 複素数を図で表し, これを使って,
- 1 r を求める。(三平方の定理)
 - 2 θ を求める。(偏角)
 - 3 r と θ を使って **極形式** で表す。

[答 案]

0 $z = \sqrt{3} + i$ とおき, これを図で表すと, 右図のようになる。

1 r を求めると,

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

2 θ を求めると,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ であるから, } \theta = \frac{\pi}{6}$$

3 極形式で表すと,

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

