

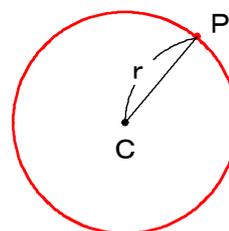
軌跡が直線や円になる

★知識の整理★

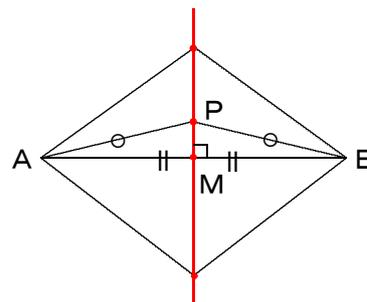
【1】軌跡

平面上で、与えられた条件を満たす点全体の集合が作る図形を、この条件を満たす点の軌跡という。

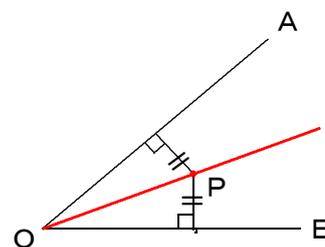
(例1) 平面上で、定点Cから一定の距離 r にある点Pの軌跡は、点Cを中心とする半径 r の円である。

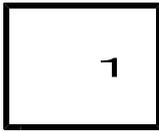


(例2) 平面上で、2定点A, Bから等距離にある点Pの軌跡は、線分ABの垂直二等分線である。



(例3) 平面上で、 $\angle AOB$ の内部にあって、OA, OBへの距離が等しい点Pの軌跡は、 $\angle AOB$ の2等分線である。ただし、点Oを除く。





平面上の座標が与えられているとき、条件を満たす点を $P(x, y)$ とし、点 P の軌跡を x, y の方程式で表すことを考えてみよう。

◇ 《軌跡が直線や円になる場合》 **学力化** → / .

★解法の技術★

2点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ に対して、条件 $AP = BP$ を満たす点 P の軌跡の方程式を求めなさい。

【考え方】軌跡の求め方

- 1 点 P の座標を (x, y) とおく。
- 2 条件を x, y の関係式で表す。
「距離についての条件」の場合は、距離を2乗する。 ◀【注】を参照
- 3 これを整理して、 x, y の満たす方程式を導く。

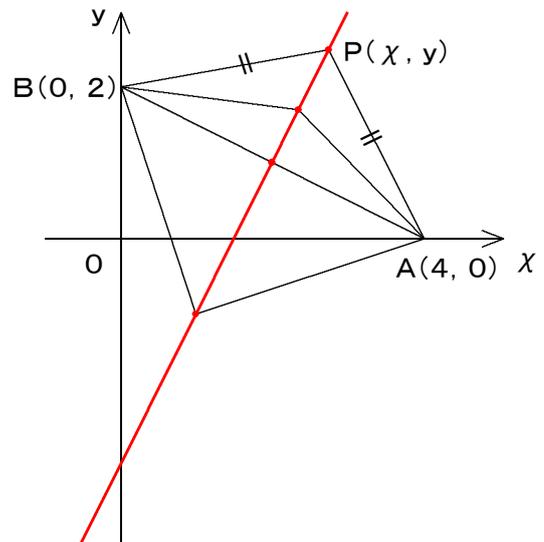
[答 案]

- 1 点 P の座標を (x, y) とおく。
- 2 $AP = BP$ より、 $AP^2 = BP^2$ によって、
 $(x - 4)^2 + y^2 = x^2 + (y - 2)^2$
- 3 これを整理して、
 $x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$
 $2x - y - 3 = 0$
- * 4 (逆に、この直線上のすべての点 $P(x, y)$ は、条件を満たす。)

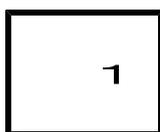
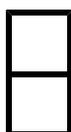
▲ふつう、書かない。

- 5 したがって、求める軌跡は、

直線 $2x - y - 3 = 0$



【注】距離を根号のついた形で求めてもいいが、両辺を2乗して根号をはずすので、最初から距離を2乗した式を作る。



補足説明

「軌跡の求め方」の詳細

1 点Pの座標を (x, y) とおく。

条件を満たす点Pの座標を (x, y) とおくことを、宣言する。

2 条件を x, y の関係式で表す。

問題に書かれている条件を x, y を使って表す。

- ・ 距離についての条件 ・ 距離を2乗する。
- ・ 放物線の頂点についての条件 ・ $y = a(x - p)^2 + q$ の形に変形する。

3 これを整理して、 x, y の満たす方程式を導く。

2で求めた x, y の方程式を、図形が分かる形に変形する。

- x^2, y^2 がある場合 ⇒ 円
- x^2 があり、 y^2 がない場合 ⇒ 放物線
- x^2 も y^2 もない場合 ⇒ 直線

* 4 確かめ

3で求めた図形上のすべての点Pが、与えられた条件を満たすことを確かめる。
通常は、証明せず次のような1文を書いておくだけでよい。

(例) 「逆に、この直線上のすべての点P (x, y) は、条件を満たす。」

「証明の例」は、次ページの資料を参照。

(このような証明を書けという問題は出題されない!)

【注意】条件を満たさない点がある場合は、その点を指摘しておく。

(例) 「点Cは除く。」とか、「線分AB上の点は除く。」など…。

5 したがって、求める軌跡は、

点Pの軌跡の形状を表す方程式を書く。

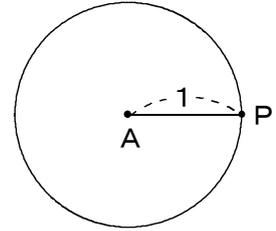
【注意】答が円の場合は、必ず中心と半径も答える。

《資料》

29 座標平面上の点の軌跡①

- ① 点Pがある条件Cを満たしながら動いてできる図形を、その条件Cを満たす点の軌跡という。このとき点Pを動点という。

例 平面上の定点をAとする。点Pが条件 $AP=1$ を満たして動くとき、点Pの描く軌跡は、中心がA、半径1の円である。



- ② 座標を用いて点Pの軌跡を求める手順は、次のようになる。

[1] 点Pの座標を (x, y) として、与えられた条件Cを x, y の方程式で表し、この方程式の表す図形を求める。

[2] [1]で求めた図形上のすべての点が、条件Cを満たしていることを確かめる。



2点A(-2, 3), B(4, -1)から等距離にある点Pの軌跡を求めてみよう。

[答 案]

[1] 点Pの座標を (x, y) とすると、
条件より、 $AP=BP$ であるから、 $AP^2=BP^2$ ◀【注】
よって、 $(x+2)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y+1)^2$

整理すると、 $3x-2y-1=0$

したがって、点Pの軌跡は、

直線 $3x-2y-1=0$

[2] 逆に、直線 $3x-2y-1=0$ 上の点P'の座標を (a, b) とすると、 $3a-2b-1=0$

よって、 $b = \frac{3a-1}{2}$ …①

①から、 $AP'^2 = (a+2)^2 + (b-3)^2 = a^2 + b^2 + 4a - 6b + 13$

$$= a^2 + b^2 + 4a - 6 \cdot \frac{3a-1}{2} + 13$$

$$= a^2 + b^2 - 5a - 16$$

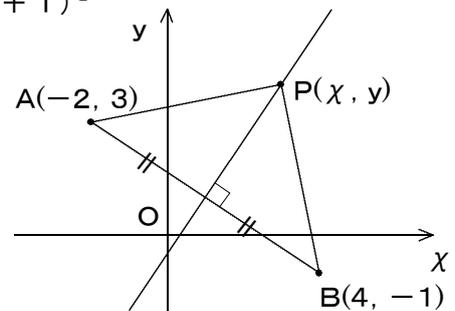
$BP'^2 = (a-4)^2 + (b+1)^2 = a^2 + b^2 - 8a + 2b + 17$

$$= a^2 + b^2 - 8a + 2 \cdot \frac{3a-1}{2} + 17$$

$$= a^2 + b^2 - 5a - 16$$

ゆえに、 $AP'^2 = BP'^2$ すなわち、 $AP' = BP'$

よって、点P'は2点A, Bから等距離にある。



[1], [2]から、点Pの軌跡は、直線 $3x-2y-1=0$ である。

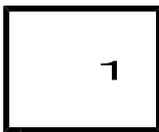
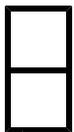
【注】 逆の[2]の証明は、[1]の手順を逆にたどることによって成り立つことが明らかなる場合は、省略することが多い。したがって、以後、逆は省略する。

【注】 $AP^2=BP^2$ は、次のように書いてもよい。

$$\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}$$

この式は、2乗して根号をはずすことになるから、初めから根号をはずしておいた式が $AP^2=BP^2$ である。

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第2章 図形と方程式 3・軌跡と領域

1 軌跡

(4 / 8) ■ 直線・円 ■

◇ 《軌跡が直線や円になる場合》 **学力化** → / ,

----- ★理解のチェック★ -----

次の条件を満たす点Pの軌跡の方程式を求めなさい。

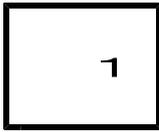
- (1) 2点A (■, 0), B(0, 2)に対して, 条件 $AP^2 - BP^2 = 2$ を満たす点P
- (2) 2点A (■, 0), B(0, 2)に対して, 条件 $AP^2 + BP^2 = 12$ を満たす点P

【考え方】点Pの座標を (x, y) とし, 点Pについての条件を x, y の式で表し, 式の表す図形を考える。たとえば,

$$(1) \{(x - \blacksquare)^2 + (y - 0)^2\} - \{(x - 0)^2 + (y - 2)^2\} = 2$$

[答 案]

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第2章 図形と方程式 3・軌跡と領域

1 軌跡

(5 / 8) ■ 直線・円 ■

◇ 《軌跡が直線や円になる場合》 **学力化** → / ,

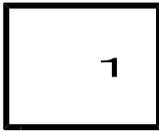
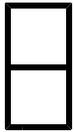
★演習★【1】

次の条件を満たす点Pの軌跡を求めなさい。

- (1) 2点A(-1, 0), B(1, ■)から等距離にある点P
- (2) 2点A(■, 0), B(0, 4)に対して, $AP^2 - BP^2 = 20$ となる点P

[答 案]

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第2章 図形と方程式 3・軌跡と領域

1 軌跡

(6 / 8) ■ 直線・円 ■

◇ 《軌跡が直線や円になる場合》 **学力化** → / ,

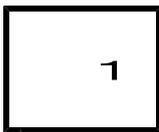
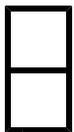
★演習★【2】

次の条件を満たす点Pの軌跡を求めなさい。

- (1) 2点A(0, ■), B(4, 0)から等距離にある点P
- (2) 2点A(2, -1), B(-1, 4)に対して, $AP^2 - BP^2 = \blacksquare$ となる点P

[答 案]

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第2章 図形と方程式 3・軌跡と領域

1 軌跡

(7/8) ■ 直線・円 ■

◇ 《軌跡が直線や円になる場合》 **学力化** → / ,

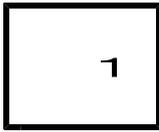
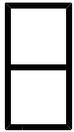
★演習★【3】

次の条件を満たす点Pの軌跡を求めなさい。

- (1) 2点A(1, 2), B(-3, ■)から等距離にある点P
- (2) 2点A(2, -3), B(-1, ■)に対して, $AP^2 - BP^2 = -2$ となる点P

[答 案]

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第2章 図形と方程式 3・軌跡と領域

1 軌跡

(8 / 8) ■ 直線・円 ■

◇ 《軌跡が直線や円になる場合》 **学力化** → / ,

★演習★【4】

平面上に3点A(1, 0), B(-2, ■), C(-■, -3)が与えられているとき, 条件 $AP^2 + BP^2 = 2CP^2$ を満たす点Pの軌跡の方程式を求めなさい。

【考え方】点Pの座標を(x, y)とおき, 条件 $AP^2 + BP^2 = 2CP^2$ から, x, yの満たす方程式を求める。

[答 案]