■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

合成関数の微分法

◇《合成関数の微分法》学力化➡　／　，

★解法の技術★

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(3x-2)^2$　　(2)　$y=(x^2-2x-3)^3$

(3)　$y=\dfrac{1}{(x+2)^3}$　　(4)　$y=\dfrac{2}{(x^2-x+1)^2}$

【考え方】

★合成関数とは？

２つの関数 $y=f(t)$，$t=g(x)$ の合成関数 $y=f(g(x))$ は，x の関数と考えることができる。

（例）　$y=(x^2+1)^8$は，$t=x^2+1$ と $y=t^8$の合成関数である。

▼　合成関数の微分法　▼

２つの関数 $y=f(t)$，$t=g(x)$ がともに微分可能なとき，合成関数 $y=f(g(x))$ も微分可能で，次の公式が成り立つ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$\boxed{2}\cdot\boxed{3}$

【注】上の公式の証明はできなくともよい。（証明は教科書を参照）

この公式の右辺を dt で約分すると，左辺と等しくなるというイメージをもつこと。

上の問題のような合成関数を直接に微分するのではなく，

$\boxed{1}$　x の式を t と置き，

$\boxed{2}$　y を t で微分し，

$\boxed{3}$　その式に，t を x で微分した式をかけておく。　◀おきかえたら必ず行う操作！

$\boxed{4}$　そのあとで，x の式を整理すると，合成関数の導関数が求まる。

（例）　$y=(x^2+1)^8$ において，$t=x^2+1$ とおくと，$y=t^8$であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=8t^7\cdot(2x)$$
$$=8(x^2+1)^7\cdot(2x)$$
$$=16x(x^2+1)^7$$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗（前のページからのつづき）

［答　案］

(1) $y=(3\chi-2)^2$ において，$t=3\chi-2$ とおくと，$y=t^2$ であるから，

$$\frac{dy}{d\chi}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\chi}$$ ◀合成関数の微分法

$$=2t\cdot(3)$$

$$=2(3\chi-2)\cdot(3)$$ ◀ t を戻す。

$$=6(3\chi-2)$$

(2) $y=(\chi^2-2\chi-3)^3$ において，$t=\chi^2-2\chi-3$ とおくと，$y=t^3$ であるから，

$$\frac{dy}{d\chi}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\chi}$$ ◀合成関数の微分法

$$=3t^2\cdot(2\chi-2)$$

$$=3(\chi^2-2\chi-3)^2\cdot(2\chi-2)$$ ◀ t を戻す。

$$=6(\chi^2-2\chi-3)^2(\chi-1)$$

(3) $y=\dfrac{1}{(\chi+2)^3}$ において，$t=\chi+2$ とおくと，$y=\dfrac{1}{t^3}$ であるから，

$$\frac{dy}{d\chi}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\chi}$$ ◀合成関数の微分法

$$=-\frac{3}{t^4}\cdot(1)$$

$$=-\frac{3}{(\chi+2)^4}$$ ◀ t を戻す。

◀ $y=t^{-3}$

$y'=-3t^{-4}$

$=-3\cdot\dfrac{1}{t^4}$

$=-\dfrac{3}{t^4}$

(4) $y=\dfrac{2}{(\chi^2-\chi+1)^2}$ において，$t=\chi^2-\chi+1$ とおくと，$y=\dfrac{2}{t^2}$ であるから，

$$\frac{dy}{d\chi}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{d\chi}$$ ◀合成関数の微分法

$$=-\frac{4}{t^3}\cdot(2\chi-1)$$

$$=-\frac{4(2\chi-1)}{(\chi^2-\chi+1)^3}$$ ◀ t を戻す。

◀ $y=2t^{-2}$

$y'=-4t^{-3}$

$=-4\cdot\dfrac{1}{t^3}$

$=-\dfrac{4}{t^3}$