■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

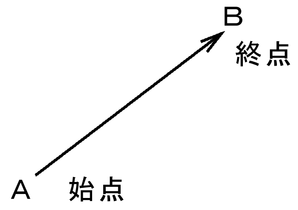
	１	第２章　平面上のベクトル　１・ベクトルとその演算 **1** ベクトル（その１） （１／４）■　ベクトル・単位ベクトル・逆ベクトル　■

ベクトル・単位ベクトル・逆ベクトル

★知識の整理★

【１】ベクトルとは？

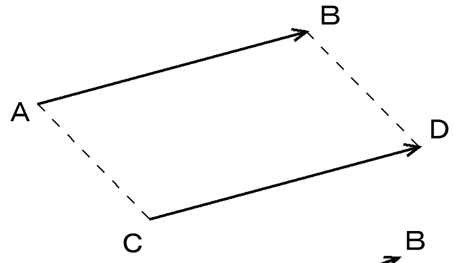
右の図のような矢印で表される線分ＡＢを，Ａを **始点** ，Ｂを **終点** とする **有向線分** という。



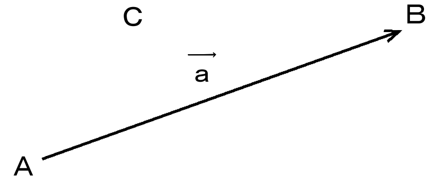
一般に，向きと大きさをもった量は，有向線分で表すことができる。その量の向きを線分の向きで，その量の大きさを線分の長さで表す。

有向線分で，その位置を問題としないで **向き** と **大きさ** だけを考えたとき，これを **ベクトル** という。

すなわち，位置が違っていても，向きと大きさが等しい有向線分ＡＢとＣＤは，ベクトルとして同じものとみなす。



有向線分ＡＢで表されるベクトルを $\overrightarrow{AB}$ と表す。
また，ベクトルは，$\vec{a}$ のような記号で表すことも多い。

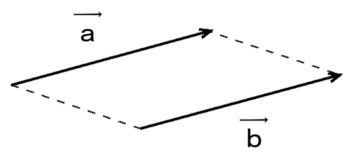


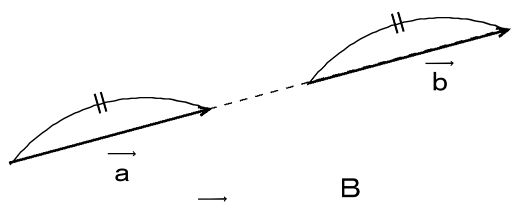
【２】等しいベクトル

右の図のように，２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きが同じで，大きさが等しいとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **等しい** といい，

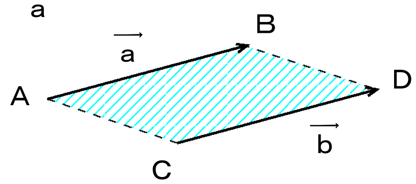
$$\vec{a}=\vec{b}$$

と表す。





ベクトルは，平面上の任意の点を始点とする有向線分で表すことができる。
$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{CD}$ と表すと，$\vec{a}=\vec{b}$ であるならば，有向線分ＡＢを平行移動して有向線分ＣＤに重ね合わすことができる。



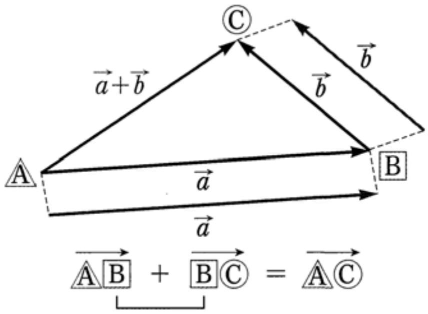
（次のページへつづく）

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

ベクトルの和，零ベクトル

★知識の整理★

【１】ベクトルの和



２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が与えられたとする。
今，点Ａを定め，

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，　$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$

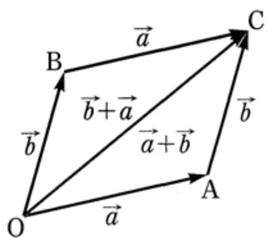
となるように点Ｂ，Ｃをとると，
ベクトル $\overrightarrow{AC}$ が決まる。
これを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **和** といい，

$\vec{a}+\vec{b}$

と表す。すなわち，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ である。

＊ベクトルの和は，次のようにイメージします。
スタートをＡ地点とし，Ｂ地点で乗り換え，Ｃ地点をゴールとして移動したとき，
Ａ地点からＣ地点への有向線分が，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ の和となります。
（Ｂ地点は単なる乗り換え地点なので，和の表現に影響を与えません。）

【２】ベクトルの和の性質



点Ｏを定め，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ と表すとき，３点Ｏ，Ａ，Ｂが一直線上になければ，ＯＡ，ＯＢを２辺とする平行四辺形がかける。
このとき，

$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$　であるから，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$　であるから，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{a}$

よって，$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
これは，３点Ｏ，Ａ，Ｂが一直線上にある場合にも成り立つ。
また，平行四辺形ＯＡＣＢにおいて，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ は対角線 $\overrightarrow{OC}$ であり，
$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ が成り立つ。

一般に，ベクトルの和について，次のことがいえる。

★ **ベクトルの和** ★

1	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	交換法則
2	$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$	結合法則

（次のページへつづく）

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

ベクトルの内積

★知識の整理★

【１】内積の定義

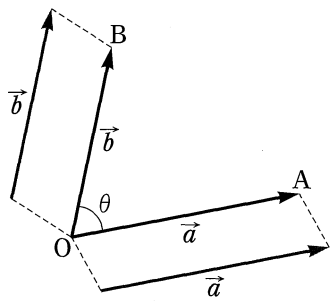
$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，１点Ｏを定め，

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$

とするとき，∠ＡＯＢの大きさ θ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ によって決まる。

これをベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角という。

ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。



ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が θ のとき，

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積といい，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ と表す。

▼　内積の定義　▼

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

（「大きさ・大きさ・$\cos\theta$」という口調で覚えます。）

（補足）　$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

$\vec{a}=\vec{b}$ のときは，$\cos\theta=\cos 0^\circ=1$ であるから，

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$=|\vec{a}||\vec{a}|\cdot 1$$
$$=|\vec{a}|^2$$

すなわち，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

また，$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$　◀分配法則

注　**内積は**，２つのベクトルの大きさと余弦の積であるから，**実数**である。

【２】ベクトルの垂直と内積

$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるといい，$\vec{a}\perp\vec{b}$ と表す。$\cos 90^\circ=0$ であるから，次のことがいえる。

▼　ベクトルの垂直と内積　▼

$\vec{a}\neq 0$，$\vec{b}\neq 0$ のとき，

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

内積の計算法則

★知識の整理★

【１】内積の計算法則

ベクトルの内積については，次の計算法則が成り立つ。

▼　内積の計算法則　▼

1	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	交換法則
2	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$	分配法則
3	$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$	
4	$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　（ｋは実数）	結合法則

★解法の技術★

上の内積の計算法則のうち，

2　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　　分配法則

を証明しなさい。

【考え方】それぞれ左辺を成分で表し，変形して右辺を導きます。

内積の成分表示　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

［考える手順］

1 ベクトルを成分で表す

2 内積を成分表示する

3 成分を内積で表す

［答　　案］

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$とおく。

$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$であるから，　◀和の成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$と$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$について，

左辺$=\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$

$=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$

$=a_1\cdot(b_1+c_1)+a_2\cdot(b_2+c_2)$　◀内積の成分表示

$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2$　◀実数の分配法則

$=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)$　◀項の組みかえ

$=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2)+(a_1,\ a_2)\cdot(c_1,\ c_2)$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

＝右辺

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

発展 ＊２５

第２章　平面上のベクトル　１・ベクトルとその演算

４ ベクトルの内積（その５）

【No.２５の後で学習☆発展問題】（１／３）

ベクトルの大きさと最小値（内積利用）

◇《ベクトルの大きさと最小値（内積利用）》 学力化➡　／　，

★解法の技術★

ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$について，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ であるとき，

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) ベクトル$2\vec{a}-3\vec{b}$の大きさを求めよ。

(3) ベクトル$\vec{a}+t\vec{b}$の大きさが最小となるように実数ｔの値を定め，そのときの最小値を求めよ。

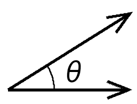
【考え方】大きさの問題は，２乗して展開すると，与えられた条件が使えるようになる。

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=\sim$，(2) $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=\sim$，(3) $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=\sim$

(3) はｔの２次式になるから，平方完成することで，最小値が求まる。

［答　　案］

《条件》



$\vec{a}=(*)$　$|\vec{a}|=\sqrt{3}$

$\vec{b}=(*)$　$|\vec{b}|=2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{3}\times 2\times\cos\theta=2\sqrt{3}\cos\theta$　…①

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$　…②　◀成分が与えられていないときは，内積の定義を使う。

①と②より，

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$　◀２乗して展開すると，与えられた条件が使える形になる。

$\left(\sqrt{3}\right)^2-2\times 2\sqrt{3}\cos\theta+2^2=5$

$3-4\sqrt{3}\cos\theta+4=5$

$-4\sqrt{3}\cos\theta=-2$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$　…③

《問題》

(1) ①と③より，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\underline{1}$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【ベクトルとその演算 No. ２５ｓ（１／３）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2) $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$=4\times(\sqrt{3})^2-12\times1+9\times2^2$

$=12-12+36$

$=36$

$|2\vec{a}-3\vec{b}|\geqq0$ より，　　◀絶対値は正

$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\underline{6}$

(3) $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=(\sqrt{3})^2+2t\times1+t^2\times2^2$

$=3+2t+4t^2$　　◀ t の2次式

$=4\left(t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+3$　　◀平方完成

$=4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}+3$

$=4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$は $t=-\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{11}{4}$ をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $\underline{t=-\frac{1}{4}\text{ のとき最小値 }\frac{\sqrt{11}}{2}\text{ をとる。}}$