

因数定理

★知識の整理★

【1】因数定理

整式 $P(x)$ を $x - a$ で割ったときのあまりは $P(a)$ であるから、割り切れるのは、 $P(x) = 0$ のときである。このとき、 $P(x) = (x - a)Q(x)$ と因数分解できる。よって、次の因数定理が成り立つ。

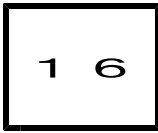
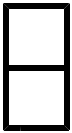
▼ 因数定理 ▼

$$x - a \text{ が整式 } P(x) \text{ の因数} \iff P(a) = 0$$

(例) $P(x) = x^3 + x^2 - 3x - 6$ に $x = 2$ を代入すると、

$$P(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 - 6 = 0$$

よって、 $x - 2$ は、 $x^3 + x^2 - 3x - 6$ の因数である。



★解法の技術★

次の問いに答えなさい。

- (1) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ を因数分解しなさい。
 (2) 整式 $P(x) = x^3 + 2x^2 + mx - 4$ が $x + 1$ を因数にもつとき、 m の値を求めなさい。

【考え方】 因数定理

$$x - a \text{ が整式 } P(x) \text{ の因数} \iff P(a) = 0$$

因数定理を用いた因数分解では、 $P(a) = 0$ となるような a の値を探します。
 その際の a の値の探し方については、枠外の【注】に詳しく説明してあります。

[答 案]

- (1) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ とおくと、

$$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0$$

◀ $P(x)$ の定数項 6 の約数 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ を考える

したがって、 $P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ。

$P(x)$ を $x - 1$ で割ると、商は $x^2 + 3x + 2$ である。

よって、

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (x - 1)(x^2 + 3x + 2) \\ &= \underline{(x - 1)(x + 1)(x - 2)} \end{aligned}$$

◀ 組立除法を利用する

1	1	+ 2	- 1	- 2
		1	3	2
	1	3	2	0

- (2) $P(x)$ が $x + 1$ を因数にもつので、 $P(-1) = 0$

よって、

$$(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) - 4 = 0$$

$$-1 + 2 - m - 4 = 0$$

$$-m = 3 \text{ より, } \underline{m = -3}$$

【注】 高次式 $P(x)$ を因数分解するとき、 $P(k) = 0$ となる k の値の候補は、

$$\pm \frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}}$$

- (例) $2x^3 + 5x^2 + 5x - 4$ を因数分解する。

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 5x - 4 \text{ とする}$$

$$\pm \frac{1}{1}, \pm \frac{2}{1}, \pm \frac{4}{1}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{4}{2}$$

すなわち、 $P(k) = 0$ となる k の値の候補は、 $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \underline{\pm \frac{1}{2}}$