■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

発展 ＊１２

第２章　図形と方程式　２・円と直線

**２** 円と直線（その４）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（１／４）

# 接線の方程式

◇《接線の方程式》学力化➡　／　，

★解法の技術★

円$(x-1)^2+(y-2)^2=25$上の点P(4，6)における接線の方程式を求めよ。

【考え方】

**▶円の接線の方程式**

円$x^2+y^2=r^2$上の点$(x_1,\ y_1)$における接線の方程式は，

$$x_1x+y_1y=r^2 \quad \cdots①$$

円$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$上の点$(x_1,\ y_1)$

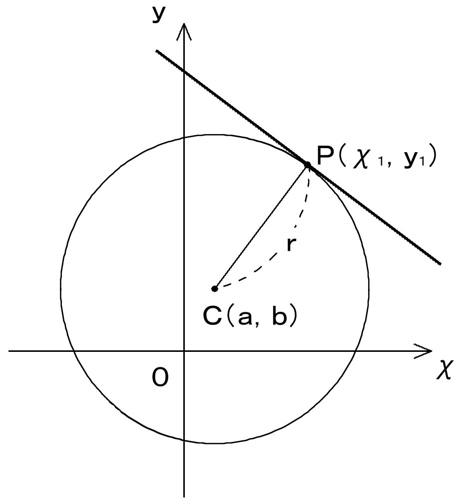
における接線の方程式は，

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2 \quad \cdots②$

中心C(a，b)が原点(0，0)になるように

グラフを平行移動をすることで，①の公式から

②の公式を導くことができる。




［答　　案］

【解き方１】接線の公式の利用

円の中心の座標は(a，b)=(1，2)であるから，

$x_1=4$，$y_1=6$，$r^2=25$を，

接線の公式②に代入して，

$(4-1)(x-1)+(6-2)(y-2)=25$

$3x+4y=36$

【解き方２】１点と傾きの与えられた直線の方程式の利用

0　（全体の解法の方針）

一般に，直線の方程式は，傾きとその直線上の１点の座標が分かれば求まる。

そこで，

「接線は半径に直交する」という性質から半径の傾きを使って接線の傾きを求め，

その接線の傾きと接線上にある接点の座標を使って接線の方程式を求める。

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



↗（前のページからのつづき）

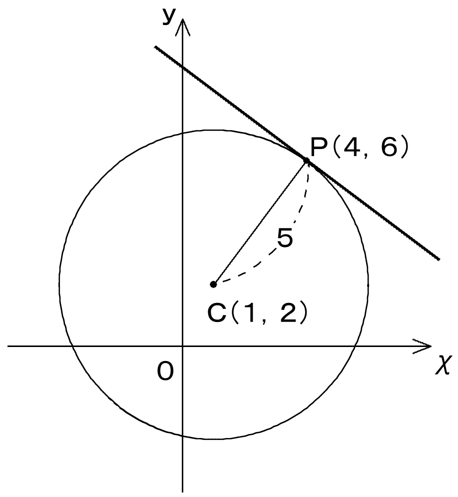
1 （接線の傾きを求める）

接点をＰ（４，６）とするとき，
円の中心Ｃ（１，２）と結んだ直線ＣＰと接線とは直交する。

ＣＰの傾きは，$\frac{6-2}{4-1}=\frac{4}{3}$ であるから，

接線の傾きをｍとすれば，

$\frac{4}{3}m=-1$ より，$m=-\frac{3}{4}$　◀$m \cdot m'=-1$




2 （接線の方程式を求める）

したがって，求める接線の方程式は，

$y-6=-\frac{3}{4}(\chi-4)$

すなわち，$3\chi+4y=36$

【解き方３】「点と直線の距離＝円の半径」の方程式の利用

0 （全体の解法の方針）

一般に，直線の方程式は，傾きとその直線上の１点の座標が分かれば求まる。
そこで，
求める接線の傾きをｍとおき，円の中心と接線の距離をｍを使って表し，
これが半径と等しいとする方程式を作り，ｍを求める。
次に，その接線の傾きｍと接線上にある接点の座標を使って接線の方程式を求める。

1 （接線の傾きを求める）　◀点と直線の距離の公式を利用する。

接点Ｐ（４，６）を通る接線の傾きをｍとすれば，

$y-6=m(\chi-4)$　すなわち，　$m\chi-y-4m+6=0$　…①　◀接線の方程式

円の中心Ｃ（１，２）から接線までの距離ＣＰは円の半径に等しいから，

$$\frac{|m\cdot1+(-1)\cdot2-4m+6|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$$

$$|-3m+4|=5\sqrt{m^2+1}$$

◀直線までの距離ＣＰ＝円の半径
◀点（$\chi_1$，$y_1$）と
直線 $a\chi+by+c=0$ の距離は
$$\frac{|a\chi_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

両辺を２乗して，

$$(-3m+4)^2=25(m^2+1)$$

整理すると，

$$9m^2-24m+16=25m^2+25$$

$$16m^2+24m+9=0$$

$(4m+3)^2=0$ より，$m=-\frac{3}{4}$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



↗ （前のページからのつづき）

2 （接線の方程式を求める）

これを①に代入して，

$$\left(-\frac{3}{4}\right)x - y - 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) + 6 = 0$$

$$-3x - 4y + 12 + 24 = 0$$

$$\underline{3x + 4y = 36}$$

【解き方４】接点⇔重解という性質の利用

0 （全体の解法の方針）

一般に，直線と円が接するための条件は，２つのグラフの式を連立してできる２次方程式の判別式が０になるときである。

そこで，

点Ｐ（４，６）を通る接線の傾きをｍとおいて接線の方程式を作り，

与えられた円の方程式とその接線の方程式を連立して，$x$についての２次方程式を作り，その判別式をＤとおく。

Ｄ＝０を解いてｍの値を求める。

次に，その接線の傾きｍと接線上にある接点の座標を使って接線の方程式を求める。

1 （接線の傾きを求める） ◀２次方程式の判別式Ｄ＝０を利用する。

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 & \cdots① \\ mx - y - 4m + 6 = 0 & \cdots② \end{cases}$$

◀【解き方３】の①の式を利用する。

②をｙについて解いて，

$$y = mx - 4m + 6 \quad \cdots②'$$

②'を①に代入して，

$$(x-1)^2 + (mx - 4m + 6 - 2)^2 = 25$$

$$(x-1)^2 + (mx - 4m + 4)^2 = 25$$

ここで，

$$(mx - 4m + 4)^2$$

$$= (mx)^2 + (-4m)^2 + 4^2 + 2(mx)(-4m) + 2(-4m)\cdot 4 + 2\cdot 4(mx)$$

$$= m^2x^2 + 16m^2 + 16 - 8m^2x - 32m + 8mx$$

$$x^2 - 2x + 1 + m^2x^2 + 16m^2 + 16 - 8m^2x - 32m + 8mx - 25 = 0$$

$$(m^2+1)x^2 + (-2 - 8m^2 + 8m)x + (1 + 16m^2 + 16 - 32m - 25) = 0$$

$$(m^2+1)x^2 - 2(4m^2 - 4m + 1) + (16m^2 - 32m - 8) = 0$$

$$(m^2+1)x^2 - 2(4m^2 - 4m + 1) + 8(2m^2 - 4m - 1) = 0$$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



↗ （前のページからのつづき）

2 （mの値を求める） ◀ $\chi$ の2次方程式の判別式を利用する。

この $\chi$ についての２次方程式の判別式をＤとすると，

$$\frac{D}{4}=(4m^2-4m+1)^2-8(m^2+1)(2m^2-4m-1)$$

ここで，

・$(4m^2-4m+1)^2$

$$=(4m^2)^2+(-4m)^2+1^2+2(4m^2)(-4m)+2(-4m)\cdot 1+2\cdot 1(4m^2)$$

$$=16m^4+16m^2+1-32m^3-8m+8m^2$$

$$=16m^4-32m^3+24m^2-8m+1$$

・$8(m^2+1)(2m^2-4m-1)$

$$=8(2m^4-4m^3-m^2+2m^2-4m-1)$$

$$=16m^4-32m^3+8m^2-32m-8$$

$$=16m^4-32m^3+24m^2-8m+1-16m^4+32m^3-8m^2+32m+8$$

$$=16m^2+24m+9$$

$$=(4m+3)^2$$

直線②が円①と接するための条件は　$D=0$　であるから，

$$(4m+3)^2=0$$

よって，$m=-\dfrac{3}{4}$

3 （接線の方程式を求める）

これを②に代入して，

$$\left(-\frac{3}{4}\right)\chi-y-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+6=0$$

$$-3\chi-4y+12+24=0$$

$$\underline{3\chi+4y=36}$$

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

| | 発展<br><br>＊１２ |
|---|---|

第２章　図形と方程式　２・円と直線

**２** 円と直線（その４）

【№１２の後で学習☆発展問題】（２／４）

◇《接線の方程式》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

円$(x-1)^2+(y-3)^2=25$上の点Ｐ([redacted]，７)における接線の方程式を求めよ。

【注意】★解法の技術★の４つの解法のうち，<u>任意の２つの解法</u>を選んで解け。

［答　　案］ **アウトプット学習は，数専ゼミの教室でできます。**

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

発展

＊１２

第２章　図形と方程式　２・円と直線

**２** 円と直線（その４）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（３／４）

◇《接線の方程式》**学力化**➡　　／　，

◇発展演習◇**【 １ 】**

円$(x+4)^2+(y-4)^2=13$上の点Ｐ([redacted]，１)における接線の方程式を求めよ。

【注意】★解法の技術★の４つの解法のうち，前問とは異なる２つの解法を選んで解け。

［答　　案］

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

発展

＊１２

第２章　図形と方程式　２・円と直線

**２** 円と直線（その４）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（４／４）

◇《接線の方程式》学力化➡　　／　，

◇発展演習◇【２】

円$\chi^2+y^2+2\chi-$[redacted]$y=0$上の点Ｐ（１，３）における接線の方程式を求めよ。

【注意】★解法の技術★の４つの解法のうち，任意の２つの解法を選んで解け。

［答　　案］