■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

相加平均と相乗平均

◇《相加平均と相乗平均》学力化➡　／　，

★知識の整理★

【１】相加平均と相乗平均

２つの数ａ，ｂに対して，$\dfrac{a+b}{2}$ をａ，ｂの **相加平均** といい，ａ＞０，ｂ＞０のとき，$\sqrt{ab}$ をａ，ｂの **相乗平均** という。

【２】相加平均と相乗平均の関係

相加平均と相乗平均の関係については，次の大小関係が成り立つ。

ａ＞０，ｂ＞０のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，ａ＝ｂのときである。

［証明］

ａ＞０，ｂ＞０であるから，

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b)$$

$$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2\}$$

◀ａ＞０だから，$a = (\sqrt{a})^2$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$$

よって，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

また，等号が成り立つのは，$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$，すなわち，ａ＝ｂのときである。

【注】上の相加平均と相乗平均の関係は，ａ≧０，ｂ≧０のときも成り立つ。

＊補足

不等式 $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ は，$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ の形で用いられることが多い。

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

◇《相加平均と相乗平均》学力化➡　／　，

★解法の技術★

ａ＞０，ｂ＞０のとき，次の不等式を証明しなさい。また，等号が成り立つときを調べなさい。

(1)　$a+\frac{9}{a}\geqq 6$　　(2)　$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)\geqq 16$

【考え方】(1)　$a\cdot\frac{9}{a}=9$（定数）より，ａと$\frac{9}{a}$に相加平均と相乗平均の関係が使える。

ａとｂについて，ａ＞０，ｂ＞０のとき，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

(2)　式を展開すると，積が定数となる２つの項が現れる。この部分に相加平均と相乗平均の関係が使える。

［答　　案］

(1)　$a+\frac{9}{a}\geqq 6$ の証明

$\boxed{1}$　（加える2式のそれぞれが正であることを確認）　◀正の数である確認は必ず必要

ａ＞０より，$\frac{9}{a}>0$ であるから，

$\boxed{2}$　（「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

（左辺）$=a+\frac{9}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}}=2\sqrt{9}=6$　◀$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

（等号成立はａ＝ｂのとき）

よって，$a+\frac{9}{a}\geqq 6$

$\boxed{3}$　（等号が成り立つ場合を示す）　◀等号が成り立つ場合については，欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは，

$a=\frac{9}{a}$，すなわち，$a^2=9$ のときであるから，

ａ＞０より，ａ＝３のときである。　◀両辺の平方根をとった

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗（前のページからのつづき）

(2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right) \geqq 16$ の証明

0 （左辺を「相加平均≧相乗平均」が使える形に変形する）

$$(\text{左辺}) = (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right) = 1+\frac{9a}{b}+\frac{b}{a}+9$$

$$= \frac{9a}{b}+\frac{b}{a}+10 \quad \cdots①$$

▲ $\frac{9a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 9$（定数）より，
$\frac{9a}{b}$ と $\frac{b}{a}$ に相加平均と相乗平均の関係が使える。

1 （加える2式のそれぞれが正であることを確認） ◀正の数である確認は必ず必要

$a>0$，$b>0$ より，$\frac{9a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$ であるから，

2 （「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$\frac{9a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{9a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = 2\sqrt{9} = 6$$

よって，$\frac{9a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 6 \quad \cdots②$

②の式の両辺に１０を加えて， ◀①の式より，

$$\frac{9a}{b}+\frac{b}{a}+10 \geqq 6+10 = 16$$

したがって，$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right) \geqq 16$

3 （等号が成り立つ場合を示す） ◀等号が成り立つ場合については，欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは，

$\frac{9a}{b} = \frac{b}{a}$，すなわち，$9a^2 = b^2$ のときであるから，

$a>0$，$b>0$ より，$3a=b$ のときである。 ◀両辺の平方根をとった

【注】「相加平均・相乗平均の関係」のイメージ図

1 ●＞０，▲＞０

2 $●+▲ \geqq 2\sqrt{●\cdot▲} = \alpha$ ◀ ●・▲は定数

3 等号成立は，●＝▲のとき