１２

第２章　図形と方程式　２・円と直線

2 円と直線（その４）

（１／６）■　円の接線(1)　■

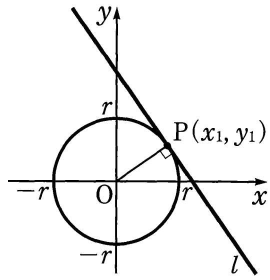
接線の方程式

★知識の整理★

【１】円の接線の方程式

原点Ｏを中心とする半径ｒの円$x^2+y^2=r^2$上の点Ｐ$(x_1,\ y_1)$における接線ℓの方程式を考えてみよう。

［１］$x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0$の場合



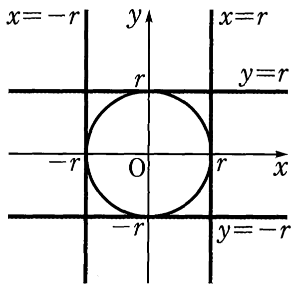
直線ＯＰの傾きは$\dfrac{y_1}{x_1}$で，接線ℓは半径ＯＰに垂直であるから，ℓの傾きは$-\dfrac{x_1}{y_1}$となり，その方程式は，

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

分母を払って整理すると，$x_1x+y_1y=x_1{}^2+y_1{}^2$

点Ｐ$(x_1,\ y_1)$が円$x^2+y^2=r^2$上にあることにより，$x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$であるから，接線の方程式は，

$$x_1x+y_1y=r^2 \quad \cdots①$$



［２］$x_1=0$の場合

$y_1=\pm r$で，接線の方程式は，

$y=r$　または　$y=-r$

［３］$y_1=0$の場合

$x_1=\pm r$で，接線の方程式は，

$x=r$　または　$x=-r$

［２］，［３］の場合も①を満たすから，まとめると次のようになる。

▶円の接線の方程式

円$x^2+y^2=r^2$上の点$(x_1,\ y_1)$における接線の方程式は，

$$x_1x+y_1y=r^2$$

（例）円$x^2+y^2=5$上の点$(-1,\ 2)$における接線の方程式は，

$(-1)\cdot x+(2)\cdot y=5$　すなわち　$-x+2y=5$

【コラム】直線の決定

［１］１点の座標と傾きが分かれば，直線の式を求めることができる。（公式の利用）

［２］２点の座標が分かれば，直線の式を求めることができる。（連立方程式の利用）

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

１２

第２章　図形と方程式　２・円と直線

2 円と直線（その４）

（２／６）■　円の接線(1)　■

◇《接線の方程式》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

円$\chi^2+y^2=13$　上の点(３，－２)における接線の方程式を求めなさい。

【考え方】１点の座標と傾きが分かれば，直線の方程式を求めることができます。

（例）　点$(\chi_1,\ y_1)$を通り，傾きがmの直線の方程式は

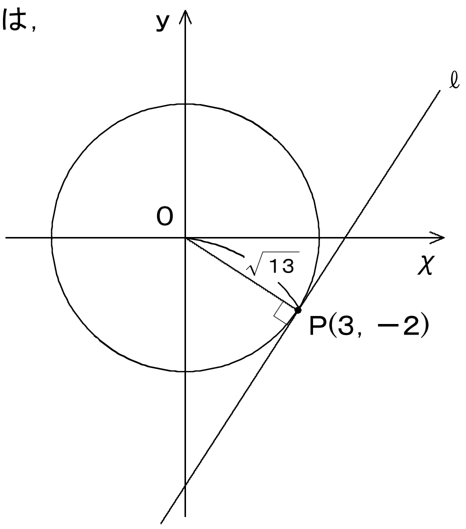
$y-y_1=m(\chi-\chi_1)$

【解き方１】接線の方程式の利用

［考える手順］	［答　　案］
1　接線の公式を使う	$\chi_1=3,\ y_1=-2,\ r^2=13$を 接線の公式　$\chi_1\chi+y_1y=r^2$　に代入して， $3\chi-2y=13$

【解き方２】１点と傾きの与えられた直線の方程式の利用

［考える手順］	［答　　案］
＊全体の解法の方針	１点の座標と傾きが分かれば，直線の方程式を求めることができるので接線の傾きを求める。 「接線は半径に直交する」という性質から半径の傾きを使って接線の傾きを求め，接線の方程式を求める。
1　接線の傾きを求める（傾き：半径に垂直）	接点をＰ（３，－２）とするとき， 円の中心Ｏと結んだ直線ＯＰと接線とは直交する。 接線の傾きをmとすれば， $-\dfrac{2}{3}\cdot m=-1$　より，$m=\dfrac{3}{2}$　　◀$m\cdot m'=-1$
2　接線の方程式を求める	したがって，求める接線の方程式は， $y+2=\dfrac{3}{2}(\chi-3)$ $2y+4=3\chi-9$ $3\chi-2y-13=0$



（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗（前のページからのつづき）

【解き方３】「点と直線の距離＝円の半径」の方程式の利用

[考える手順]	[答　　案]
＊全体の解法の方針	１点の座標と傾きが分かれば，直線の方程式を求めることができるので接線の傾きを求める。 傾きをｍとし，円の中心と接線の距離をｍを使って表し，これが半径と等しいとする方程式を作り，ｍを求め，接線の方程式を求める。
1 接線の傾きを求める 点と直線の距離の公式を利用する	接点（３，－２）を通る直線は，傾きをｍとすれば， $y+2=m(x-3)$　すなわち，　$mx-y-3m-2=0$ 原点からの直線までの距離が円の半径に等しいから， $\dfrac{\lvert m\cdot 0+(-1)\cdot 0-3m-2\rvert}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{13}$ 両辺を２乗して， $\dfrac{(3m+2)^2}{m^2+1}=13$ $(3m+2)^2=13(m^2+1)$ $9m^2+12m+4=13m^2+13$ $4m^2-12m+9=0$ $(2m-3)^2=0$ $m=\dfrac{3}{2}$
2 接線の方程式を求める	したがって，求める接線の方程式は， $y+2=\dfrac{3}{2}(x-3)$ $2y+4=3x-9$ $3x-2y-13=0$