■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

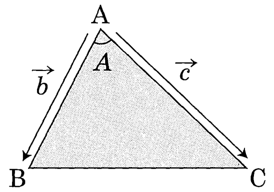
三角形の面積の公式

★解法の技術★

右図の△ＡＢＣの面積Ｓは，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$$

で与えられることを証明しなさい。



【考え方】ベクトルを利用した三角形の面積の公式は，数学Ｉで学習した三角形の面積の公式をもとに作成します。→数学Ｉの復習については，下記資料参照

［考える手順］

［答　　案］

$$S=\frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{c}|\sin A$$ ◀面積の公式

$$=\frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{c}|\sqrt{1-\cos^2 A}$$ ◀$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ を代入

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2(1-\cos^2 A)}$$ ◀$|\vec{b}||\vec{c}|$を$\sqrt{}$ の中に入れる

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(|\vec{b}||\vec{c}|\cos A)^2}$$ ◀（　）をはずした

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$$ ◀$|\vec{b}||\vec{c}|\cos A=\vec{b}\cdot\vec{c}$（内積の定義）

《面積の公式》

右図のように，点ＢからACに垂線BHを下ろします。このとき，

$$S=\frac{1}{2}\times b\times h$$ ← $\frac{1}{2}$×(底辺)×(高さ)

となるよね。

ここで，△AHBに注目すると，

$$\sin A=\frac{h}{c}$$ ← $\sin A=\frac{(A\text{の対辺})}{(\text{斜辺})}$

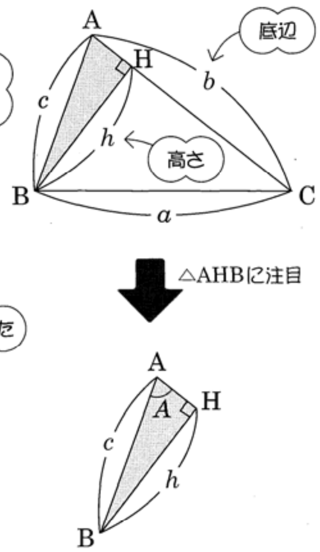
なので，

$$h=c\sin A$$ ← 分母を払った

これを上式に代入すると，

$$S=\frac{1}{2}\times b\times c\sin A$$

$$=\frac{1}{2}bc\sin A$$

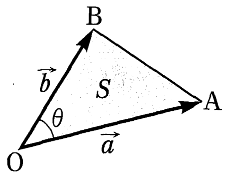


■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

◇《三角形の面積》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ のとき，△ＯＡＢの面積Ｓは，次の式で与えられることを証明しなさい。



$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

［考える手順］

［答　　案］

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，

$S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$　◀面積の公式

$=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-\cos^2 A}$　◀$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ を代入

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2 A)}$　◀$|\vec{a}||\vec{b}|$ を $\sqrt{\quad}$ の中に入れる

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(|\vec{a}||\vec{b}|\cos A)^2}$　◀（　）をはずした

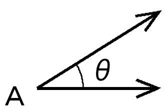
$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$　◀$|\vec{a}||\vec{b}|\cos A=\vec{a}\cdot\vec{b}$
（内積の定義）

＊上の公式は，次のように使って三角形の面積を求めます。

> 三角形ＡＢＣにおいて，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AC}|=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{15}$ のとき，三角形ＡＢＣの面積Ｓを求めなさい。

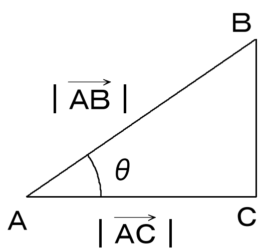
［答　　案］

《図的状況》



$\overrightarrow{AB}=(*)$　$|\overrightarrow{AB}|=2$

$\overrightarrow{AC}=(*)$　$|\overrightarrow{AC}|=3$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{15}$

//

$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2\times3^2-(\sqrt{15})^2}$

$=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

２ ７

第２章　平面上のベクトル　１・ベクトルとその演算

４ ベクトルの内積（その７）

（３／７）■　三角形の面積　■

◇《三角形の面積》**学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

△ＡＢＣにおいて，$|\overrightarrow{AB}|=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。３点Ａ，Ｂ，Ｃが次の条件を満たすとき，△ＡＢＣの面積Ｓを求めなさい。

(1)　$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=5$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=4$ のとき

(2)　$\vec{b}=(3,\ 2)$，$\vec{c}=(2,\ 2)$

(3)　$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}+2\vec{c}|=\sqrt{29}$ のとき

(4)　$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=1$ で，$\vec{b}+\vec{c}$ と $2\vec{b}-5\vec{c}$ が垂直のとき

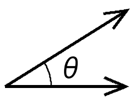
【考え方】(3)，(4) は，内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を，与えられた条件から求めておく必要があります。

・(3)　$|\vec{b}+2\vec{c}|=\sqrt{29}$　…両辺を２乗して $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求める。

・(4)　２つのベクトルの内積が０を利用して $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求める。

［答　　案］

(1)



$\vec{b}=(*)$　$|\vec{b}|=3$

$\vec{c}=(*)$　$|\vec{c}|=5$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=4$

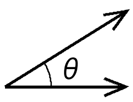
//

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$$　◀ベクトルを使った三角形の面積の公式

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times5^2-4^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{209}$$

(2)



$\vec{b}=(3,\ 2)$　$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$\vec{c}=(2,\ 2)$　$|\vec{c}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=3\times2+2\times2=10$

//

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$$　◀ベクトルを使った三角形の面積の公式

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3})^2\times(2\sqrt{2})^2-10^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{104-100}$$

$$=1$$

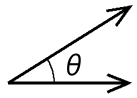
（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□□　【ベクトルとその演算　No.２７（３／７）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(3)



$\vec{b}=(*)\quad |\vec{b}|=3$

$\vec{c}=(*)\quad |\vec{c}|=\sqrt{2}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$　　◀下の ＊ で計算

//

$*\ |\vec{b}+2\vec{c}|^2=|\vec{b}|^2+4\vec{b}\cdot\vec{c}+4|\vec{c}|^2=(\sqrt{29})^2$　　◀条件を使って $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求める。

$3^2+4\vec{b}\cdot\vec{c}+4\times(\sqrt{2})^2=29$　　（面積を求めるのに必要だから。）

$4\vec{b}\cdot\vec{c}=12$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$

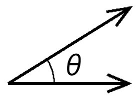
//

$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$　　◀ベクトルを使った三角形の面積の公式

$=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\times(\sqrt{2})^2-3^2}$

$=\underline{\frac{3}{2}}$

(4)



$\vec{b}=(*)\quad |\vec{b}|=2$

$\vec{c}=(*)\quad |\vec{c}|=1$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$　　◀下の ＊ で計算：条件を使って $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求める

//　　（面積を求めるのに必要だから。）

$(\vec{b}+\vec{c})\cdot(2\vec{b}-5\vec{c})=2|\vec{b}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}-5|\vec{c}|^2=0$　　◀垂直

$2\times2^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}-5\times1^2=0$

$8-3\vec{b}\cdot\vec{c}-5=0$

$-3\vec{b}\cdot\vec{c}=-3$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$

//

$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}$　　◀ベクトルを使った三角形の面積の公式

$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\times1^2-1^2}$

$=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$