



1 5

第6章 積分法 1・不定積分

2 置換積分法と部分積分法 (その9)

(1 / 5) ■ 部分積分法② (部分積分 & 部分積分型) ■

部分積分法を2回適用するタイプ

◇ 《部分積分法② (部分積分 & 部分積分型)》 学力化 → / .

★解法の技術★

次の不定積分を求めよ。

$$\int x^2 e^{2x} dx$$

【考え方】 部分積分法の公式を適用したとき、右辺に直接には積分できない部分 (2種類の関数の積) が現れるタイプの問題である。

このときは、この部分に再度、部分積分法を適用して、その結果を与式に組み込めばよい。

[答 案]

$$\int x^2 e^{2x} dx$$

◀ちがう種類の関数の積 → 部分積分法

① (問題の一方を「微分の形」で表す) ◀①の部分は、答案には書かなくてもよい。

2つの関数のそれぞれを微分すると、

$$(x^2)' = 2x \cdots f(x), \quad (e^{2x})' = 2e^{2x} \cdots g'(x) \quad \leftarrow g'(x) \text{ 合成関数の微分法}$$

微分しても簡単にならないのは e^{2x} なので、こちらを「微分の形」で表すために積分すると $\frac{1}{2}e^{2x}$ となるから、 $\int x^2 e^{2x} dx$ は $\int x^2 \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx$ と表せる。

◀ $f(ax+b)$ の不定積分

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

② (部分積分法の公式を作り、右辺を計算する)

$$\begin{aligned} \int x^2 \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx &= x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int (x^2)' \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) dx && \leftarrow \text{部分積分法の公式} \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int \underbrace{x e^{2x}} dx \end{aligned}$$

▲ 直接には積分できない (2種類の関数の積) → 部分積分法

ここで、 $\int \underbrace{x e^{2x}} dx$ に再度、部分積分法を適用して、

$$\begin{aligned} \int x \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)' dx &= x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int x' \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) dx && \leftarrow \text{部分積分法の公式} \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx && \leftarrow x' = 1 \end{aligned}$$

(次のページへつづく) ↗

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【積分法 No. 15 (1/5)】 - 〈2枚目/2枚〉

↗ (前のページからのつづき)

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad (C \text{は積分定数})$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \right) \quad (C \text{は積分定数})$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4} e^{2x} (2x^2 - 2x + 1) + C}}$$