

解の対称式 — 3次方程式の解と係数の関係の応用

◇ 《解の対称式 — 3次方程式の解と係数の関係の応用》 学力化 →

★解法の技術★

3次方程式  $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$  の3つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき、次の式の値を求めなさい。

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$       (2)  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$       (3)  $2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

【考え方】 3次方程式の解の対称式の値の求め方

3次方程式の解と係数の関係を利用するために…

- ・ 与式を  $\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$  で表す。
- ・ 与式が  $(p - \alpha)(p - \beta)(p - \gamma)$  の形をしているときは、  
 $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$  とおき、 $x = 1$  を代入して式を整理する。

(1) は、 $(\alpha + \beta + \gamma)^2$  の展開式を利用する。

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \underbrace{2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha}_{\blacktriangle + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)} \text{ より,}$$

$$\underline{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

(2) は、 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$  を因数分解して、基本対称式で書きかえる。

$$\begin{aligned} & \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \underbrace{\alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha}_{\blacktriangle - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}) \text{ より,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

▼ 3次方程式の解と係数の関係 ▼

3次方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  の3つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とすると、

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

□ □ 【高次方程式 No. 26 (1/5)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

[答 案]

3次方程式  $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$  で,

3次方程式の解と係数の関係より,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{4}{2} = 2, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 \\ &= \frac{9}{4} - \frac{16}{4} = \underline{\underline{-\frac{7}{4}}} \end{aligned}$$

(2) 《解1》 ◀基本対称式で表す方法

$$\begin{aligned} &\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \{ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \} + 3\alpha\beta\gamma \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{7}{4} - 2\right) + 3 \cdot \frac{5}{2} \quad \leftarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \text{の値は(1)の結果を利用する。} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{15}{4}\right) + \frac{15}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{15}{8}}}$$

(2) 《解2》 ◀解  $\alpha, \beta, \gamma$  についての等式を利用して、次数を下げる方法

$\alpha, \beta, \gamma$  は  $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0$  の解であるから,

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\alpha - 5 &= 0 \text{ より, } 2\alpha^3 = 3\alpha^2 - 4\alpha + 5 \\ 2\beta^3 - 3\beta^2 + 4\beta - 5 &= 0 \text{ より, } 2\beta^3 = 3\beta^2 - 4\beta + 5 \\ 2\gamma^3 - 3\gamma^2 + 4\gamma - 5 &= 0 \text{ より, } 2\gamma^3 = 3\gamma^2 - 4\gamma + 5 \end{aligned} \right\} \dots \textcircled{1}$$

①の辺々をたして,

$$\begin{aligned} 2(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) &= 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 15 \\ &= 3 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) - 4 \cdot \frac{3}{2} + 15 \\ &= -\frac{21}{4} - \frac{12}{2} + 15 = -\frac{21}{4} - \frac{24}{4} + \frac{60}{4} = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \underline{\underline{\frac{15}{8}}}$$

【注】《解2》は、 $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$  の式の値を求めるときに使うので使えるようにしておきましょう。

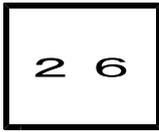
(3)  $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$  とおく。

これに、 $x = 1$  を代入して,

$$2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 2(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$$

よって,

$$2(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = \underline{\underline{-2}}$$



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

**6** 高次方程式 (その5)

(2/5) ■ 解の対称式 ■

◇ 《解の対称式－3次方程式の解と係数の関係の応用》 **学力化** → /

★理解のチェック★

3次方程式  $x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = 0$  の3つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき、次の式の値を求めなさい。

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$       (2)  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$       (3)  $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)$

【考え方】 (3)  $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)$  は、 $-(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$  として公式を使う。

[答 案]

3次方程式  $x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = 0$  で、

3次方程式の解と係数の関係より、

$\alpha + \beta + \gamma = \dots\dots\dots$ ,       $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \dots\dots\dots$ ,       $\alpha\beta\gamma = \dots\dots\dots$

★

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\dots\dots\dots)^2 - 2(\dots\dots\dots)$       ◀公式

=

◀基本対称式の値を代入

(2) 《解1》 ◀基本対称式で表す方法

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

=  $(\dots\dots\dots) \{ \dots\dots\dots - (\dots\dots\dots) \} + \dots\dots\dots$

=  $\dots\dots\dots$       ◀  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  の値は(1)の結果を利用する。

=  $\dots\dots\dots$

(2) 《解2》 ◀解  $\alpha, \beta, \gamma$  についての等式を利用して、次数を下げる方法

$\alpha, \beta, \gamma$  は  $x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = 0$  の解であるから、

$\dots\dots\dots$  より、  $\alpha^3 = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$  より、  $\beta^3 = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$  より、  $\gamma^3 = \dots\dots\dots$

} ...①

①の辺々をたして、

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \dots\dots\dots$

=

=

よって、  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \dots\dots\dots$

(次のページへつづく) →

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No. 26 (2 / 5)】 - 〈2枚目 / 2枚〉

↗ (前のページからのつづき)

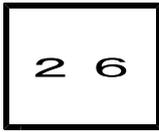
(3)  $x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = \dots\dots\dots$  とおく。

これに,  $x = \dots\dots\dots$  を代入して,

$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

よって,

$(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = \dots\dots\dots$



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

**6** 高次方程式 (その5)

(3/5) ■ 解の対称式 ■

◇ 《解の対称式－3次方程式の解と係数の関係の応用》 **学力化** →

★演習★【1】

3次方程式  $x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$  の3つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき、次の式の値を求めなさい。

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(2)  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

(3)  $\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\gamma + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta)$

【考え方】 (3)  $\alpha + \beta + \gamma = k$  より、 $\beta + \gamma$  を  $k$  と  $\alpha$  を使って表す。同様に、 $\gamma + \alpha$  を  $k$  と  $\beta$ 、 $\alpha + \beta$  を  $k$  と  $\gamma$  を使って表し、式を整理し、対称式を作る。(kの値は予め求めておく。)

[答 案]

3次方程式  $x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$  で、

3次方程式の解と係数の関係より、

.....



(1)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$  ..... ◀公式

$=$  ..... ◀基本対称式の値を代入

(2) 《解1》 ◀基本対称式で表す方法

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$=$  ..... ◀公式

$=$  ..... ◀ $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ の値は(1)の結果を利用する。

(2) 《解2》 ◀解  $\alpha, \beta, \gamma$  についての等式を利用して、次数を下げる方法

$\alpha, \beta, \gamma$  は  $x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$  の解であるから、

.....より、 $\alpha^3 =$  .....

.....より、 $\beta^3 =$  .....

.....より、 $\gamma^3 =$  .....

} ...①

①の辺々をたして、

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 =$  .....

$=$

$=$

よって、 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 =$  .....

(次のページへつづく) →

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No. 26 (3 / 5)】 - 〈2枚目 / 2枚〉

➤ (前のページからのつづき)

$$(3) \alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\gamma + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta) \cdots \textcircled{1}$$

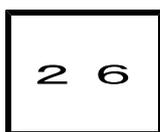
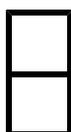
ここで,  $\alpha + \beta + \gamma = \dots\dots\dots$ より,

$$\begin{cases} \beta + \gamma = \dots\dots\dots \\ \gamma + \alpha = \dots\dots\dots \\ \alpha + \beta = \dots\dots\dots \end{cases}$$

であるから, これらを①にそれぞれ代入して,

$$\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\gamma + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta)$$

=



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式 (その5)

(4 / 5) ■ 解の対称式 ■

◇ 《解の対称式 - 3次方程式の解と係数の関係の応用》 **学力化** → /

★演習★【2】

3次方程式  $2x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$  の3つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき、次の式の値を求めなさい。

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$       (2)  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$       (3)  $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$

【考え方】 (2)は、(3)で  $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$  の式の値を求めなければならないので、  
◀解  $\alpha, \beta, \gamma$  についての等式を利用して、次数を下げる方法  
で解きます。

[答 案]

3次方程式  $2x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$  で、

3次方程式の解と係数の関係より、

★

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$

(2) 《解1》 ◀基本対称式で表す方法

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

=

(2) 《解2》 ◀解  $\alpha, \beta, \gamma$  についての等式を利用して、次数を下げる方法

$\alpha, \beta, \gamma$  は  $2x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$  の解であるから、

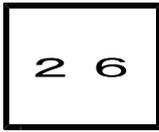
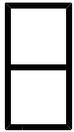
ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No. 26 (4 / 5)】 - 〈2枚目 / 2枚〉

↗ (前のページからのつづき)

(3) (2) の①から, それぞれの式の両辺に, それぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  をかけて,

◀ (2) 《解2》と同じ解き方



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

**6** 高次方程式 (その5)

(5/5) ■ 解の対称式 ■

◇ 《解の対称式－3次方程式の解と係数の関係の応用》 **学力化** →

★演習★【3】

3次方程式  $x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = 0$  の3つの解を  $\alpha, \beta, \gamma$  とするとき、次の式の値を求めなさい。

(1)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$

(2)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(3)  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

(4)  $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$

(5)  $(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)$

(6)  $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$

【考え方】 (1) 通分すれば対称式が現れる。

(2)～(4) はNo. 26 (1/5)～(4/5)を参照。

(5) No. 26 (1/5) (3) を参照。

(6) No. 26 (3/5) (3) を参照。

$\alpha + \beta + \gamma = k$  より、 $\beta + \gamma$  を  $k$  と  $\alpha$  を使って表す。同様に、 $\gamma + \alpha$  を  $k$  と  $\beta$ 、 $\alpha + \beta$  を  $k$  と  $\gamma$  を使って表し、式を整理し、対称式を作る。(kの値は予め求めておく。)

[答 案]

3次方程式  $x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = 0$  で、

3次方程式の解と係数の関係より、

★

(1)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} =$

◀通分

(2)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$

(3) 《解1》 ◀基本対称式で表す方法

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

=

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No. 26 (5 / 5)】 - 〈2枚目 / 3枚〉

↗ (前のページからのつづき)

(3) 《解2》 ◀ 解  $\alpha, \beta, \gamma$  についての等式を利用して、次数を下げる方法

$\alpha, \beta, \gamma$  は  $x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = 0$  の解であるから、

(4) (3) の①から、それぞれの式の両辺に、それぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  をかけて、

◀ (2) 《解2》と同じ解き方

(5)  $x^3 - 3x^2 - 2x + 7 = \dots\dots\dots$  とおく。

(次のページへつづく) ↗

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No. 26 (5 / 5)】 - 〈3枚目 / 3枚〉

↗ (前のページからのつづき)

$$(6) (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \dots \textcircled{3}$$

ここで,  $\alpha + \beta + \gamma = \dots\dots\dots$ より,