■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

２７

第１章　いろいろな式　３・高次方程式
５　高次方程式（その６）
（１／４）■　３次方程式と虚数解(3)　■

## ３次方程式と虚数解(3)―次数を下げる方法

◇《３次方程式と虚数解(3)－次数を下げる方法》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

ａ，ｂを実数とする。３次方程式 $\chi^3+a\chi^2-5\chi+b=0$ の１つの解が $2+\sqrt{3}i$ であるとき，ａ，ｂの値と他の解を求めよ。

【考え方】「３次方程式と虚数解」の問題には３通りの解法がある。
【１】次数を下げる方法　…№２７で学習
【２】複素数の相等を使った方法　…№２２で学習済み
【３】３次方程式の解と係数の関係を使った解法　…№２５で学習済み

＊ここでは，１つの問題を３つの解法で解いてみよう。

★

### 【１】次数を下げる方法

（解法の全体の流れ）

1 与式をその方程式の２つの複素数の解の積でわる。
◀複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき，その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

2 (余り)＝０として $\chi$ についての恒等式を作り，これから与式の係数の連立方程式を作り，これを解いてa，ｂの値を求める。

3 ａ，ｂを与式に代入し，この３次方程式を解き，$\chi$ の値を求める。　◀因数定理を利用

［答　　案］

1 （与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる）　◀2次式でわることで余りが１次式になる⇔次数が下がる

$P(\chi)=\chi^3+a\chi^2-5\chi+b$ とおく。　↑これを使ってa，bを求める。

$P(\chi)=0$ が実数係数の方程式で，$2+\sqrt{3}i$ が $P(\chi)=0$ の解だから，その共役複素数 $2-\sqrt{3}i$ も $P(\chi)=0$ の解となる。

したがって，$P(\chi)$ は $\chi-(2+\sqrt{3}i)$，$\chi-(2-\sqrt{3}i)$ を因数にもつので，$P(\chi)$ は $\{\chi-(2+\sqrt{3}i)\}\{\chi-(2-\sqrt{3}i)\}=\chi^2-4\chi+7$ で割り切れる。

$$
\begin{array}{rl}
 & \chi+(a+4) \\
\chi^2-4\chi+7\,) & \chi^3+a\chi^2-5\chi+b \\
 & \chi^3-4\chi^2+7\chi \\
\hline
 & (a+4)\chi^2-12\chi+b \\
 & (a+4)\chi^2-4(a+4)\chi+7(a+4) \\
\hline
 & 4(a+1)\chi+(b-7a-28) \quad \cdots①
\end{array}
$$

これを使ってａ，ｂを求める。

（次のページへつづく）

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



↗（前のページからのつづき）

2 （（余り）＝0として $\chi$ についての恒等式を作り，これから与式の係数の連立方程式を作り，これを解いてa，bの値を求める）

①より，（余り）＝０とすると，　◀4（a＋1）$\chi$ ＋（b－7a－28）＝０が $\chi$ についての恒等式

$$\begin{cases} 4(a+1)=0, \\ b-7a-28=0 \end{cases}$$

これを解いて，

　$a=-1$，$b=21$

3 （因数定理を利用して，他の解を求める）

このとき，与式の方程式は，

$$\chi^3-\chi^2-5\chi+21=0$$

$P(\chi)=\chi^3-\chi^2-5\chi+21$ とおくと，

$P(-3)=(-3)^3-(-3)^2-5\cdot(-3)+21=0$

となるから，$P(\chi)$ は $\chi+3$ で割り切れて，

$$P(\chi)=(\chi^2-4\chi+7)(\chi+3)$$

よって，他の解は，$\chi=2-\sqrt{3}i$，$-3$

◀他の解は次のようにして求めてもよい。
上の筆算で，（余り）＝0とすると，
a＝－1だから，
$\chi$ ＋（a＋4）＝ $\chi$ ＋3となり，与式は
$\chi$ ＋3でわり切れるので，
P（－3）＝…　（左の式へつづく）

▲複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき，その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

4 （答をまとめる）

以上より，

　$a=-1$，$b=21$，他の解は，$\chi=2-\sqrt{3}i$，$-3$

▲$2+\sqrt{3}i$ は答えに入れないこと！

## 【２】複素数の相等の利用

**（解法の全体の流れ）**

1 ３次方程式に与えられた解を代入し，$a+bi=0$ の形に整理する。

2 複素数の相等の性質を利用して，与式の係数の連立方程式を作り，これを解いて a，b の値を求める。

3 a，b を与式に代入し，この３次方程式を解き，$\chi$ の値を求める。　◀因数定理の利用

◀複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき，その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

［答　　案］

1 （3次方程式に与えられた解を代入し，$a+bi=0$ の形に整理する）

$\chi=2+\sqrt{3}i$ がこの方程式の解であるから，これを方程式に代入して，

$$(2+\sqrt{3}i)^3+a(2+\sqrt{3}i)^2-5(2+\sqrt{3}i)+b=0$$

左辺を展開して整理すると，

$$2^3+3\cdot2^2\cdot\sqrt{3}i+3\cdot2\cdot(\sqrt{3}i)^2+(\sqrt{3}i)^3+4a+4a\sqrt{3}i+a(\sqrt{3}i)^2-10-5\sqrt{3}i+b=0$$

$$8+12\sqrt{3}i-18-3\sqrt{3}i+4a+4a\sqrt{3}i-3a-10-5\sqrt{3}i+b=0$$

$$(-20+a+b)+(4\sqrt{3}+4\sqrt{3}a)i=0 \quad \cdots①$$

◀これを使ってa，bを求める。

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



↗（前のページからのつづき）

2 （複素数の相等の性質を利用して，与式の係数の連立方程式を作り，これを解いてa，bの値を求める）

①において，ａ，ｂは実数より－２０＋ａ＋ｂ，$4\sqrt{3}+4\sqrt{3}a$ も実数なので，

$-20+a+b=0$，$4\sqrt{3}+4\sqrt{3}a=0$

これを解いて，

$a=-1$，$b=21$

3 （因数定理を利用して，他の解を求める）
4 （答をまとめる）
】【１】と同じ

## 【３】３次方程式の解と係数の関係の利用

**（解法の全体の流れ）**

1 ３次方程式の３つの解を，与えられた解，その共役な複素数，および $\alpha$ とする。

◀複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき，その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

2 ３次方程式の解と係数の関係を調べる。

3 $\boxed{2}$より，ａ，ｂ，$\alpha$ についての連立方程式を作り，これを解いて，ａ，ｂ，$\alpha$ の値を求める。

［答　案］

1 （3次方程式の3つの解を設定する）

$\chi^3+a\chi^2-5\chi+b=0$ について，

$\chi=2+\sqrt{3}i$ が実数を係数とする３次方程式の解であるから，これと共役な複素数 $2-\sqrt{3}i$ もまた解であるから，３つの解を $\alpha$，$\beta=2+\sqrt{3}i$，$\gamma=2-\sqrt{3}i$ とおくと，

▲ $\alpha$ が残る1つの解である。

2 （3次方程式の解と係数の関係を調べる）

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$ であるから，

$\alpha+(2+\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)=-\dfrac{a}{1}$ より，$\underline{\alpha+4=-a}$ …①

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$ であるから，

$\alpha(2+\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)+(2-\sqrt{3}i)\alpha=\dfrac{-5}{1}$ より，

$\underline{4\alpha+7=-5}$ …②

$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$ であるから，

$\alpha(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)=-\dfrac{b}{1}$ より，$\underline{7\alpha=-b}$ …③

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



↗（前のページからのつづき）

3 （連立方程式を解いて，a，bの値と他の解の１つを求める）

①，②，③を連立して解くと，

②より，４$\alpha$＝－１２より，$\alpha$＝－３　…②'　　◀$\alpha$は残る1つの解

②' を①に代入して，－３＋４＝－ａより，ａ＝－１

②' を③に代入して，７×(－３)＝－ｂより，ｂ＝２１

4 （答をまとめる）

よって，

ａ＝－１，ｂ＝２１，他の解は，$\chi=2-\sqrt{3}i$，－３

▲$2+\sqrt{3}i$ は答えに入れないこと！

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

２７

第１章　いろいろな式　３・高次方程式
**5** 高次方程式（その６）
（２／４）■　３次方程式と虚数解(3)　■

◇《３次方程式と虚数解(3)－次数を下げる方法》**学力化**➡　／　,

★理解のチェック★

ａ，ｂを実数とする。３次方程式 $\chi^3-2\chi^2+a\chi+b=0$ は $\chi=2+i$ を解にもつとする。このとき，ａ，ｂの値と方程式のすべての解を求めよ。　［学習院大］

## 【１】次数を下げる方法

［答　案］

1　（与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる）　◀2次式でわることで余りが1次式になる⇔次数が下がる

$P(\chi)=\chi^3-2\chi^2+a\chi+b=0$ とおく。　↑これを使ってa，bを求める。

$\big)\ \chi^3-2\chi^2\qquad+a\chi+\quad b$

…①　◀これを使ってa，bを求める。

2　（(余り)＝0として $\chi$ についての恒等式を作り，これから与式の係数の連立方程式を作り，これを解いてa，bの値を求める）

①より，（余り）＝０とすると，

$\begin{cases} \text{-----------} \\ \text{-----------} \end{cases}$

これを解いて，

ａ＝ ＿＿＿＿，　ｂ＝ ＿＿＿＿

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



↗（前のページからのつづき）

3 （因数定理を利用して，他の解を求める）

このとき，与式の方程式は，

__________________________

P( $\chi$ ) ＝ __________________________ とおくと，

◀他の解は次のようにして求めてもよい。

上の筆算で，(余り)＝0とすると，

与式は ________ でわり切れるので，

P(　　)＝…　（左の式へつづく）

よって，解は，$\chi$ ＝ ________________

▲複素数 a＋b$i$ が方程式の解になるとき，その共役な複素数 a－b$i$ も解になる。

4 （答をまとめる）

以上より，

a＝　　　　，b＝　　　　，解は，$\chi$ ＝

▲すべての解を答える。

## 【２】複素数の相等の利用

［答　　案］

1 （3次方程式に与えられた解を代入し，a＋b$i$ ＝0の形に整理する）

$\chi$ ＝2＋$i$ がこの方程式の解であるから，これを方程式に代入して，

左辺を展開して整理すると，

(　　　　　　　　)＋(　　　　　　)$i$ ＝0　…①

◀これを使ってa，bを求める。

2 （複素数の相等の性質を利用して，与式の係数の連立方程式を作り，これを解いてa，bの値を求める）

①において，a，b は実数より ____________，________ も実数なので，

______________ ＝0，__________ ＝0

これを解いて，

a＝ ______，b＝ ______

3 （因数定理を利用して，他の解を求める）
4 （答をまとめる）
} 【１】と同じ

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



↗（前のページからのつづき）

## 【３】３次方程式の解と係数の関係の利用

［答　　案］

1　（3次方程式の3つの解を設定する）

$\chi^3-2\chi^2+a\chi+b=0$ について,

$\chi=2+i$ が実数を係数とする３次方程式の解であるから，これと共役な複素数

__________もまた解であるから，３つの解を $\alpha$， $\beta=2+i$， $\gamma=$ __________とおくと,

▲ $\alpha$ が残る1つの解である。

2　（3次方程式の解と係数の関係を調べる）

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$ であるから,

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$ であるから,

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$ であるから,

3　（連立方程式を解いて，a，bの値と他の解の１つを求める）

①，②，③を連立して解くと,

4　（答をまとめる）

よって,

$a=$　　　　　，$b=$　　　　　，解は，$\chi=$

▲すべての解を答える。

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

２７

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

５ 高次方程式（その６）

（３／４）■　３次方程式と虚数解(3)　■

◇《３次方程式と虚数解(3)－次数を下げる方法》学力化➡　／　，

★演習★【１】

３次方程式 $\chi^3+a\chi^2+b\chi+10=0$ の解の１つが $\chi=2+i$ であるとき，実数の定数ａ，ｂの値と他の解を求めよ。［山梨学院大］

## 【１】次数を下げる方法

［答　案］

1 （与式をその方程式の２つの複素数の解の積でわる）

P($\chi$)＝$\chi^3+a\chi^2+b\chi+10=0$ とおく。

$)\ \chi^3\quad +a\chi^2\quad +b\chi+10$

これを使ってａ，ｂを求める。

…①

2 （(余り)＝0として $\chi$ についての恒等式を作り，これから与式の係数の連立方程式を作り，これを解いてa，bの値を求める）

①より，(余り)＝０とすると，

（次のページへつづく）

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □　【高次方程式　No.２７（３／４）】　ー〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

3　（因数定理を利用して，他の解を求める）

このとき，与式の方程式は，

4　（答をまとめる）

以上より，

___

▲$2+i$ は答えに入れないこと！

## 【２】複素数の相等の利用

［答　　案］

1　（3次方程式に与えられた解を代入し，$a+bi=0$の形に整理する）

2　（複素数の相等の性質を利用して，与式の係数の連立方程式を作り，これを解いてa，bの値を求める）

3　（因数定理を利用して，他の解を求める）
4　（答をまとめる）
【１】と同じ

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No.２７（３／４）】 －〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

## 【３】３次方程式の解と係数の関係の利用

［答　案］

1 （3次方程式の3つの解を設定する）

$\chi^3+a\chi^2+b\chi+10=0$ について，

2 （3次方程式の解と係数の関係を調べる）

3 （連立方程式を解いて，a，bの値と他の解の１つを求める）

①，②，③を連立して解くと，

4 （答をまとめる）

よって，

▲$2+i$ は答えに入れないこと！

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

２ ７

第１章　いろいろな式　３・高次方程式
**５** 高次方程式（その６）
（４／４）■　３次方程式と虚数解(3)　■

◇《３次方程式と虚数解(3)ー次数を下げる方法》**学力化**➡　　／　，

★演習★【２】

複素数3−$i$ が３次方程式 $\chi^3-4\chi^2+a\chi+b=0$ の解となるような実数の定数ａ，ｂの値を求めよ。また，残りの解を求めよ。

## 【１】次数を下げる方法

［答　　案］

1 （与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる）

$P(\chi)=\chi^3-4\chi^2+a\chi+b=0$ とおく。

2 （（余り）＝0として $\chi$ についての恒等式を作り，これから与式の係数の連立方程式を作り，これを解いてa，bの値を求める）

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



↗ （前のページからのつづき）

3 （因数定理を利用して，他の解を求める）

4 （答をまとめる）

以上より，

______________________________

## 【２】複素数の相等の利用

［答　案］

1 （3次方程式に与えられた解を代入し，a＋b$i$ ＝0の形に整理する）

2 （複素数の相等の性質を利用して，与式の係数の連立方程式を作り，これを解いてa，bの値を求める）

3 （因数定理を利用して，他の解を求める）

4 （答をまとめる）

】【１】と同じ

（次のページへつづく） ↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



↗（前のページからのつづき）

## 【３】３次方程式の解と係数の関係の利用

［答　案］

1 （3次方程式の3つの解を設定する）

$\chi^3 - 4\chi^2 + a\chi + b = 0$ について，

2 （3次方程式の解と係数の関係を調べる）

3 （連立方程式を解いて，a，bの値と他の解の１つを求める）

①，②，③を連立して解くと，

4 （答をまとめる）

よって，