

3次方程式と虚数解(3) 一次数を下げる方法

◇ 《3次方程式と虚数解(3) 一次数を下げる方法》 **学力化** → /

★解法の技術★

$a, b$  を実数とする。3次方程式  $x^3 + ax^2 - 5x + b = 0$  の1つの解が  $2 + \sqrt{3}i$  であるとき、 $a, b$  の値と他の解を求めよ。

【考え方】 「3次方程式と虚数解」の問題には3通りの解法がある。

【1】 次数を下げる方法 …No.27で学習

【2】 複素数の相等を使った方法 …No.22で学習済み

【3】 3次方程式の解と係数の関係を使った解法 …No.25で学習済み

\* ここでは、1つの問題を3つの解法で解いてみよう。



【1】 次数を下げる方法

(解法の全体の流れ)

① 与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる。

◀ 複素数  $a+bi$  が方程式の解になるとき、その共役な複素数  $a-bi$  も解になる。

② (余り) = 0 として  $x$  についての恒等式を作り、これから与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて  $a, b$  の値を求める。

③  $a, b$  を与式に代入し、この3次方程式を解き、 $x$  の値を求める。 ◀ 因数定理を利用

[答 案]

① (与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる) ◀ 2次式でわることで余りが1次式になる ⇔ 次数が下がる

$P(x) = x^3 + ax^2 - 5x + b$  とおく。 ↑ これを使って  $a, b$  を求める。

$P(x) = 0$  が実数係数の方程式で、 $2 + \sqrt{3}i$  が  $P(x) = 0$  の解だから、その共役複素数  $2 - \sqrt{3}i$  も  $P(x) = 0$  の解となる。

したがって、 $P(x)$  は  $x - (2 + \sqrt{3}i)$ 、 $x - (2 - \sqrt{3}i)$  を因数にもつので、 $P(x)$  は  $\{x - (2 + \sqrt{3}i)\} \{x - (2 - \sqrt{3}i)\} = x^2 - 4x + 7$  で割り切れる。

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 4x + 7 \overline{) x^3 + ax^2 - 5x + b} \\
 \underline{x^3 - 4x^2 + 7x} \phantom{+ b} \\
 (a+4)x^2 - 12x + b \\
 \underline{(a+4)x^2 - 4(a+4)x + 7(a+4)} \\
 4(a+1)x + (b - 7a - 28) \dots \textcircled{1}
 \end{array}$$

これを使って  $a, b$  を求める。



(次のページへつづく) ↗

□ □ 【高次方程式 No. 27 (1/4)】 - 〈2枚目/4枚〉

➡ (前のページからのつづき)

2 ( (余り)=0として $\chi$ についての恒等式を作り, これから与式の係数の連立方程式を作り, これを解いて $a, b$ の値を求める)

①より, (余り)=0とすると, ◀ $4(a+1)\chi + (b-7a-28)=0$ が $\chi$ についての恒等式

$$\begin{cases} 4(a+1)=0, \\ b-7a-28=0 \end{cases}$$

これを解いて,

$$a = -1, b = 21$$

3 (因数定理を利用して, 他の解を求める)

このとき, 与式の方程式は,

$$\chi^3 - \chi^2 - 5\chi + 21 = 0$$

$P(\chi) = \chi^3 - \chi^2 - 5\chi + 21$ とおくと,

$$P(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 21 = 0$$

となるから,  $P(\chi)$  は  $\chi + 3$  で割り切れて,

$$P(\chi) = (\chi^2 - 4\chi + 7)(\chi + 3)$$

よって, 他の解は,  $\chi = 2 - \sqrt{3}i, -3$

▲複素数  $a+bi$  が方程式の解になるとき, その共役な複素数  $a-bi$  も解になる。

◀他の解は次のようにして求めてもよい。

上の筆算で, (余り)=0とすると,

$a = -1$ だから,

$\chi + (a+4) = \chi + 3$ となり, 与式は

$\chi + 3$ でわり切れるので,

$P(-3) = \dots$  (左の式へつづく)

4 (答をまとめる)

以上より,

$$a = -1, b = 21, \text{ 他の解は, } \chi = 2 - \sqrt{3}i, -3$$

▲ $2 + \sqrt{3}i$  は答えに入れないこと!

## 【2】複素数の相等の利用

(解法の全体の流れ)

1 3次方程式に与えられた解を代入し,  $a+bi = 0$ の形に整理する。

2 複素数の相等の性質を利用して, 与式の係数の連立方程式を作り, これを解いて $a, b$ の値を求める。

3  $a, b$ を与式に代入し, この3次方程式を解き,  $\chi$ の値を求める。 ◀因数定理の利用

◀複素数  $a+bi$  が方程式の解になるとき, その共役な複素数  $a-bi$  も解になる。

[答 案]

1 (3次方程式に与えられた解を代入し,  $a+bi = 0$ の形に整理する)

$\chi = 2 + \sqrt{3}i$ がこの方程式の解であるから, これを方程式に代入して,

$$(2 + \sqrt{3}i)^3 + a(2 + \sqrt{3}i)^2 - 5(2 + \sqrt{3}i) + b = 0$$

左辺を展開して整理すると,

$$\begin{aligned} 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}i + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3 \\ + 4a + 4a\sqrt{3}i + a(\sqrt{3}i)^2 - 10 - 5\sqrt{3}i + b = 0 \end{aligned}$$

$$8 + 12\sqrt{3}i - 18 - 3\sqrt{3}i + 4a + 4a\sqrt{3}i - 3a - 10 - 5\sqrt{3}i + b = 0$$

$$(-20 + a + b) + (4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}a)i = 0 \quad \dots \textcircled{1} \quad \leftarrow \text{これを使って, } a, b \text{ を求める。}$$

(次のページへつづく) ➡

□ □ 【高次方程式 No. 27 (1/4)】 - 〈3枚目/4枚〉

➡ (前のページからのつづき)

- 2 (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いてa, bの値を求める)
- ①において、a, bは実数より $-20 + a + b$ ,  $4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}a$ も実数なので、  
 $-20 + a + b = 0$ ,  $4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}a = 0$   
 これを解いて、  
 $a = -1$ ,  $b = 21$

- 3 (因数定理を利用して、他の解を求める) } 【1】と同じ
- 4 (答をまとめる)

【3】 3次方程式の解と係数の関係の利用

(解法の全体の流れ)

- 1 3次方程式の3つの解を、与えられた解、その共役な複素数、および $\alpha$ とする。  
 ◀複素数  $a+bi$  が方程式の解になるとき、その共役な複素数  $a-bi$  も解になる。
- 2 3次方程式の解と係数の関係を調べる。
- 3 2より、a, b,  $\alpha$ についての連立方程式を作り、これを解いて、a, b,  $\alpha$ の値を求める。

[答 案]

- 1 (3次方程式の3つの解を設定する)  
 $x^3 + ax^2 - 5x + b = 0$  について、  
 $x = 2 + \sqrt{3}i$  が実数を係数とする3次方程式の解であるから、これと共役な複素数  
 $2 - \sqrt{3}i$  もまた解であるから、3つの解を $\alpha$ ,  $\beta = 2 + \sqrt{3}i$ ,  $\gamma = 2 - \sqrt{3}i$  とおくと、  
 ▲ $\alpha$ が残る1つの解である。

- 2 (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$  であるから、

$\alpha + (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = -\frac{a}{1}$  より、 $\alpha + 4 = -a$  …①

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$  であるから、

$\alpha(2 + \sqrt{3}i) + (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i)\alpha = \frac{-5}{1}$  より、

$4\alpha + 7 = -5$  …②

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$  であるから、

$\alpha(2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) = -\frac{b}{1}$  より、 $7\alpha = -b$  …③

(次のページへつづく) ➡

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No. 27 (1/4)】 - 〈4枚目/4枚〉

➡ (前のページからのつづき)

③ (連立方程式を解いて、 $a$ ,  $b$ の値と他の解の1つを求める)

①, ②, ③を連立して解くと、

$$\text{②より, } 4\alpha = -12 \text{ より, } \alpha = -3 \quad \dots \text{②}'$$

◀  $\alpha$ は残る1つの解

$$\text{②}' \text{を①に代入して, } -3 + 4 = -a \text{ より, } a = -1$$

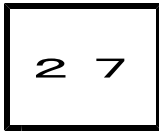
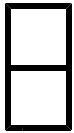
$$\text{②}' \text{を③に代入して, } 7 \times (-3) = -b \text{ より, } b = 21$$

④ (答をまとめる)

よって、

$$\underline{a = -1, \quad b = 21, \quad \text{他の解は, } \chi = 2 - \sqrt{3}i, \quad -3}$$

▲  $2 + \sqrt{3}i$ は答えに入れないこと!



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

5 高次方程式 (その6)

(2/4) ■ 3次方程式と虚数解(3) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(3) 一次数を下げる方法》 **学力化** → /

★理解のチェック★

a, b を実数とする。3次方程式  $\chi^3 - 2\chi^2 + a\chi + b = 0$  は  $\chi = 2+i$  を解にもつとする。このとき, a, b の値と方程式のすべての解を求めよ。 [学習院大]

【1】 次数を下げる方法

[答 案]

1 (与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる) ◀2次式でわることで余りが1次式になる⇔次数が下がる

$P(\chi) = \chi^3 - 2\chi^2 + a\chi + b = 0$  とおく。 ↑これを使ってa, bを求める。

$$\begin{array}{r} \phantom{)} \chi^3 - 2\chi^2 \phantom{+ a\chi + b} \\ \hline \phantom{)} \phantom{\chi^3} - 2\chi^2 \phantom{+ a\chi + b} \\ \hline \phantom{)} \phantom{\chi^3} \phantom{- 2\chi^2} + a\chi + b \\ \hline \phantom{)} \phantom{\chi^3} \phantom{- 2\chi^2} + a\chi + b \end{array}$$

...① ◀これを使ってa, bを求める。

2 ((余り)=0としてχについての恒等式を作り, これから与式の係数の連立方程式を作り, これを解いてa, bの値を求める)

①より, (余り)=0とすると,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

これを解いて,

a = \_\_\_\_\_, b = \_\_\_\_\_

□ □ 【高次方程式 No. 27 (2 / 4)】 - 〈2枚目 / 3枚〉

➡ (前のページからのつづき)

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

このとき、与式の方程式は、

.....  
P(x) = .....とおくと、

◀他の解は次のようにして求めてもよい。

上の筆算で、(余り)=0とすると、  
与式は .....でわり切れるので、  
P( ) = ... (左の式へつづく)

よって、解は、x = .....

▲複素数 a+bi が方程式の解になるとき、その共役な複素数 a-bi も解になる。

4 (答をまとめる)

以上より、

a = \_\_\_\_\_, b = \_\_\_\_\_, 解は、x = \_\_\_\_\_

▲すべての解を答える。

【2】複素数の相等の利用

[答 案]

1 (3次方程式に与えられた解を代入し、a+bi = 0の形に整理する)

x = 2+i がこの方程式の解であるから、これを方程式に代入して、

左辺を展開して整理すると、

( ) + ( )i = 0 ...①

◀これを使ってa, bを求める。

2 (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いてa, bの値を求める)

①において、a, bは実数より ....., .....も実数なので、

..... = 0, ..... = 0

これを解いて、

a = ....., b = .....

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

4 (答をまとめる)

} 【1】と同じ

(次のページへつづく) ➡

□ □ 【高次方程式 No. 27 (2 / 4)】 - 〈3枚目 / 3枚〉

➡ (前のページからのつづき)

【3】 3次方程式の解と係数の関係の利用

[答 案]

1 (3次方程式の3つの解を設定する)

$$x^3 - 2x^2 + ax + b = 0 \text{ について,}$$

$x = 2 + i$  が実数を係数とする3次方程式の解であるから, これと共役な複素数  
.....もまた解であるから, 3つの解を  $\alpha$ ,  $\beta = 2 + i$ ,  $\gamma = \dots\dots\dots$  とおくと,

▲  $\alpha$  が残る1つの解である。

2 (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \text{ であるから,}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \text{ であるから,}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \text{ であるから,}$$

3 (連立方程式を解いて, a, bの値と他の解の1つを求める)

①, ②, ③を連立して解くと,

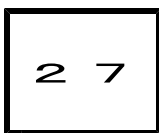
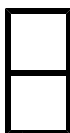
4 (答をまとめる)

よって,

$$\underline{a = \quad, \quad b = \quad, \quad \text{解は, } x = \quad}$$

▲ すべての解を答える。

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

**5** 高次方程式 (その6)

(3/4) ■ 3次方程式と虚数解(3) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(3) - 次数を下げる方法》 **学力化** → /

★演習★【1】

3次方程式  $\chi^3 + a\chi^2 + b\chi + 10 = 0$  の解の1つが  $\chi = 2+i$  であるとき、実数の定数  $a, b$  の値と他の解を求めよ。

[山梨学院大]

**【1】 次数を下げる方法**

[答 案]

**1** (与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる)

$P(\chi) = \chi^3 + a\chi^2 + b\chi + 10 = 0$  とおく。

$$\begin{array}{r} \hline ) \chi^3 \quad + a\chi^2 \quad + b\chi + 10 \\ \hline \end{array}$$

これを使って  $a, b$  を求める。

↓  
...①

**2** ((余り)=0として  $\chi$  についての恒等式を作り、これから与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて  $a, b$  の値を求める)

①より、(余り)=0とすると、

(次のページへつづく) ↗



ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No. 27 (3 / 4)】 - 〈2枚目 / 3枚〉

➔ (前のページからのつづき)

③ (因数定理を利用して、他の解を求める)

このとき、与式の方程式は、

④ (答をまとめる)

以上より、

---

▲  $2+i$  は答えに入れないこと!

【2】複素数の相等の利用

[答 案]

① (3次方程式に与えられた解を代入し、 $a+bi=0$ の形に整理する)

② (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いてa, bの値を求める)

③ (因数定理を利用して、他の解を求める)

④ (答をまとめる)

} 【1】と同じ

(次のページへつづく) ➔

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No. 27 (3 / 4)】 - 〈3枚目 / 3枚〉

➔ (前のページからのつづき)

【3】 3次方程式の解と係数の関係の利用

[答 案]

① (3次方程式の3つの解を設定する)

$x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$  について,

② (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

③ (連立方程式を解いて, a, bの値と他の解の1つを求める)

①, ②, ③を連立して解くと,

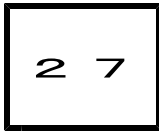
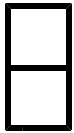
④ (答をまとめる)

よって,

---

▲  $2+i$  は答えに入れないこと!

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

**5** 高次方程式 (その6)

(4 / 4) ■ 3次方程式と虚数解(3) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(3) 次数を下げる方法》 **学力化** → /

★演習★【2】

複素数  $3-i$  が3次方程式  $x^3 - 4x^2 + ax + b = 0$  の解となるような実数の定数  $a$ ,  $b$  の値を求めよ。また、残りの解を求めよ。

**【1】 次数を下げる方法**

[答 案]

**1** (与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる)

$P(x) = x^3 - 4x^2 + ax + b = 0$  とおく。

**2** ((余り)=0として  $x$  についての恒等式を作り, これから与式の係数の連立方程式を作り, これを解いて  $a$ ,  $b$  の値を求める)

(次のページへつづく) ↗

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No. 27 (4 / 4)】 - 〈2枚目 / 3枚〉

↗ (前のページからのつづき)

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

4 (答をまとめる)

以上より、

---

## 【2】複素数の相等の利用

[答 案]

1 (3次方程式に与えられた解を代入し、 $a+bi=0$ の形に整理する)

2 (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて $a, b$ の値を求める)

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

4 (答をまとめる)

} 【1】と同じ

(次のページへつづく) ↗

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【高次方程式 No. 27 (4 / 4)】 - 〈3枚目 / 3枚〉

➔ (前のページからのつづき)

【3】 3次方程式の解と係数の関係の利用

[答 案]

① (3次方程式の3つの解を設定する)

$x^3 - 4x^2 + ax + b = 0$  について,

② (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

③ (連立方程式を解いて, a, bの値と他の解の1つを求める)

①, ②, ③を連立して解くと,

④ (答をまとめる)

よって,

---