

絶対値を含む不等式

★解法の技術★

次の不等式を証明しなさい。また、等号が成り立つときを調べなさい。

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

【考え方】不等式の証明方法の一般原則

不等式 $A \geq B$ が成り立つことを証明するには、 $A - B \geq 0$ を示せばよい。

0以上であることを示すには、次の2つの方法がある。

《1型》条件式利用 } → No.5 (1/6) を参照
 《2型》平方完成

絶対値記号のついた不等式の証明方法

実数 a の絶対値 $|a|$ について、次のことが成り立つ。

① $|a| \geq 0$, ② $|a|^2 = a^2$, ③ $|a| |b| = |ab|$

④ $|a| - a \geq 0$ (等号成立は $a \geq 0$ のとき)

これを用いて、両辺の2乗の差 ≥ 0 を示せばよい。

(だから、予め各辺が0以上であることを確認しておく必要がある。)

[答 案]

$$|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

← 各辺が0以上であることを示す

$$(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 = (|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2$$

← 両辺の2乗の差 ≥ 0 を示す

$$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2$$

$$= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$= 2|ab| - 2ab$$

$$= 2(|ab| - ab) \geq 0$$

不等式の証明《1型》

よって、 $(|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2 \quad \dots \textcircled{2}$

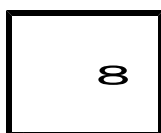
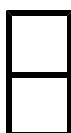
①, ②より、 $|a| + |b| \geq |a + b|$

← ①と②の両方を合わせて結論を示す

また、等号が成り立つのは、 $|ab| - ab = 0$

すなわち、 $ab \geq 0$ のときである。

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その4)

(2/4) ■ 絶対値を含む不等式 ■

◇ 《絶対値を含む不等式》 **学力化** → /

----- ★理解のチェック★ -----

次の不等式を証明しなさい。また、等号が成り立つときを調べなさい。

$$|a| + |b| \geq |a - b|$$

【考え方】絶対値記号のついた不等式の証明方法

実数 a の絶対値 $|a|$ について、次のことが成り立つ。

① $|a| \geq 0$, ② $|a|^2 = a^2$, ③ $|a||b| = |ab|$

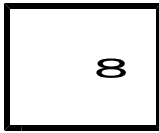
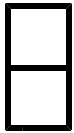
④ $|a| - a \geq 0$ (等号成立は $a \geq 0$ のとき)

これを用いて、両辺の2乗の差 ≥ 0 を示せばよい。

(だから、予め各辺が0以上であることを確認しておく必要がある。)

[答 案]

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その4)

(3/4) ■ 絶対値を含む不等式 ■

◇ 《絶対値を含む不等式》 **学力化** → /

★演習★【1】

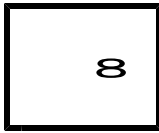
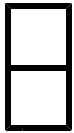
次の不等式を証明しなさい。また、(1)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $|a| + |b| \geq \sqrt{a^2 + b^2}$

(2) $2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}(|a| + |b|)$

[答 案]

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その4)

(4 / 4) ■ 絶対値を含む不等式 ■

◇ 《絶対値を含む不等式》 **学力化** → /

★演習★【2】

次の不等式を証明しなさい。また、(1)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $|a| + |b| + |c| \geq |a + b + c|$

(2) $5\sqrt{a^2 + b^2} \geq 3|a| + 4|b|$

[答 案]