■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

相加平均と相乗平均

◇《相加平均と相乗平均》学力化➡　／　,

★知識の整理★

【１】相加平均と相乗平均

２つの数ａ，ｂに対して，$\dfrac{a+b}{2}$ をａ，ｂの **相加平均** といい，ａ＞０，ｂ＞０のとき，$\sqrt{ab}$ をａ，ｂの **相乗平均** という。

【２】相加平均と相乗平均の関係

相加平均と相乗平均の関係については，次の大小関係が成り立つ。

ａ＞０，ｂ＞０のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，ａ＝ｂのときである。

［証明］

ａ＞０，ｂ＞０であるから，

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b)$$

$$= \frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2\}$$　◀ａ＞０だから，$a = (\sqrt{a})^2$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$$

よって，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

また，等号が成り立つのは，$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$，すなわち，ａ＝ｂのときである。

【注】上の相加平均と相乗平均の関係は，ａ≧０，ｂ≧０のときも成り立つ。

＊補足

不等式 $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ は，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ の形で用いられることが多い。

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

◇《相加平均と相乗平均》学力化➡　／　，

★解法の技術★

ａ＞０，ｂ＞０のとき，次の不等式を証明しなさい。また，等号が成り立つときを調べなさい。

(1)　$a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$　　　(2)　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}\right)\geqq 16$

【考え方】(1)　$a\cdot\dfrac{9}{a}=9$（定数）より，ａと$\dfrac{9}{a}$に相加平均と相乗平均の関係が使える。

ａとｂについて，ａ＞０，ｂ＞０のとき，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

(2)　式を展開すると，積が定数となる２つの項が現れる。この部分に相加平均と相乗平均の関係が使える。

［答　　案］

(1)　$a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$ の証明

1　（加える2式のそれぞれが正であることを確認）　　◀正の数である確認は必ず必要

ａ＞０より，$\dfrac{9}{a}>0$ であるから，

2　（「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$(\text{左辺})=a+\frac{9}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}}=2\sqrt{9}=6$$

◀ $a+b\geqq 2\sqrt{ab}$
（等号成立はａ＝ｂのとき）

よって，$a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$

3　（等号が成り立つ場合を示す）　　◀等号が成り立つ場合については，欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは，

$a=\dfrac{9}{a}$，すなわち，$a^2=9$ のときであるから，

ａ＞０より，ａ＝３のときである。　　◀両辺の平方根をとった

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗ （前のページからのつづき）

(2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right) \geqq 16$ の証明

0 （左辺を「相加平均≧相乗平均」が使える形に変形する）

$$(\text{左辺}) = (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right) = 1+\frac{9a}{b}+\frac{b}{a}+9$$

$$= \frac{9a}{b}+\frac{b}{a}+10 \quad \cdots ①$$

▲ $\frac{9a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 9$（定数）より，
$\frac{9a}{b}$ と $\frac{b}{a}$ に相加平均と相乗平均の関係が使える。

1 （加える2式のそれぞれが正であることを確認）　◀正の数である確認は必ず必要

$a>0$，$b>0$ より，$\frac{9a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$ であるから，

2 （「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$\frac{9a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{9a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = 2\sqrt{9} = 6$$

よって，$\frac{9a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 6 \quad \cdots ②$

②の式の両辺に１０を加えて，　◀①の式より，

$$\frac{9a}{b}+\frac{b}{a}+10 \geqq 6+10 = 16$$

したがって，$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right) \geqq 16$

3 （等号が成り立つ場合を示す）　◀等号が成り立つ場合については，欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは，

$\frac{9a}{b} = \frac{b}{a}$，すなわち，$9a^2 = b^2$ のときであるから，

$a>0$，$b>0$ より，$3a=b$ のときである。　◀両辺の平方根をとった

【注】「相加平均・相乗平均の関係」のイメージ図

1　●＞０，▲＞０

2　$● + ▲ \geqq 2\sqrt{●\cdot▲} = \alpha$　◀ ●・▲は定数

3　等号成立は，●＝▲のとき

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

6

第１章　いろいろな式　２・式と証明

3 不等式の証明（その２）

（３／６）■　相加平均と相乗平均　■

◇《相加平均と相乗平均》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

ａ＞０，ｂ＞０のとき，次の不等式を証明しなさい。また，等号が成り立つときを調べなさい。

(1)　$a+\dfrac{8}{a}\geqq 4\sqrt{2}$　　　(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(4b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 9$

【考え方】(2)　相加平均と相乗平均の大小関係が使えるように，左辺を展開します。
$a+b+5\geqq 2\sqrt{ab}+5$ とすることで，左辺が９以上であることを示すことができます。

［答　　案］

(1)　$a+\dfrac{8}{a}\geqq 4\sqrt{2}$ の証明

1　（加える2式のそれぞれが正であることを確認）　　◀正の数である確認は必ず必要

2　（「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

3　（等号が成り立つ場合を示す）　　◀等号が成り立つ場合については，№6（２／６）を参照

等号が成り立つのは，

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □　【式と証明　No.６（３／６）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2)　$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(4b+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 9$ の証明

0　（左辺を「相加平均≧相乗平均」が使える形に変形する）

(左辺)$=\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(4b+\dfrac{1}{a}\right)=$

1　（加える2式のそれぞれが正であることを確認）　◀正の数である確認は必ず必要

2　（「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

3　（等号が成り立つ場合を示す）　◀等号が成り立つ場合については，欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは，

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

6

第１章　いろいろな式　２・式と証明

3 不等式の証明（その２）

（４／６）■　相加平均と相乗平均　■

◇《相加平均と相乗平均》学力化➡　／　，

★演習★【１】

ａ＞０，ｂ＞０のとき，次の不等式を証明しなさい。

(1)　$2a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{2}$

(2)　$a+b+\frac{1}{a+b} \geqq 2$

(3)　$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{a}{b}\right) \geqq 4$

【考え方】(3) 相加平均と相乗平均の大小関係が使えるように，左辺を展開します。

$a+b+2 \geqq 2\sqrt{ab}+2$ とすることで，左辺が４以上であることを示すことができます。

【注】証明のみ。等号成立条件不要。

［答　案］＜旧版フォレスタ数学Ⅱ　１－１１ Exercise【１】＞

(1)　$2a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{2}$ の証明

1 （加える2式のそれぞれが正であることを確認）　◀正の数である確認は必ず必要

2 （「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

（等号成立はａ＝ｂのとき）

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【式と証明 No.６（４／６）】 －〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2) $a+b+\dfrac{1}{a+b} \geqq 2$ の証明

1 （加える2式のそれぞれが正であることを確認）　◀正の数である確認は必ず必要

2 （「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

(3) $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right) \geqq 4$ の証明

0 （左式を「相加平均≧相乗平均」が使える形に変形する）

$(\text{左辺}) = \left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{a}{b}\right) =$

1 （加える2式のそれぞれが正であることを確認）　◀正の数である確認は必ず必要

2 （「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

	6

第１章　いろいろな式　２・式と証明
3 不等式の証明（その２）
（５／６）■　相加平均と相乗平均　■

◇《相加平均と相乗平均》 学力化➡　　／　，

★演習★【２】

ａ＞０，ｂ＞０，ｃ＞０，ｄ＞０のとき，次の不等式を証明しなさい。また，等号が成り立つ場合を調べなさい。

(1) $\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right) \geqq 4$　　(2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right) \geqq 9$

［答　　案］

(1) $\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right) \geqq 4$ の証明

0 （左辺を「相加平均≧相乗平均」が使える形に変形する）

1 （加える2式のそれぞれが正であることを確認）　◀正の数である確認は必ず必要

2 （「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

3 （等号が成り立つ場合を示す）　◀等号が成り立つ場合については，欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは，

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □　【式と証明　No.６（５／６）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2)　$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right) \geqq 9$ の証明

0　（左辺を「相加平均≧相乗平均」が使える形に変形する）

1　（加える2式のそれぞれが正であることを確認）　◀正の数である確認は必ず必要

2　（「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

3　（等号が成り立つ場合を示す）　◀等号が成り立つ場合については，欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは，

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

◇《相加平均と相乗平均》**学力化**➡　　／　，

★演習★【３】

次の問いに答えなさい。

(1)　$a \neq 0$ のとき，次の不等式を証明しなさい。

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geqq 2$$

(2)　$\chi > 0$ のとき，$\chi + \dfrac{4}{\chi}$ の最小値を求めなさい。また，そのときの χ を求めなさい。

【考え方】(2)　$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$ のとき，$a + b$ の最小値は $2\sqrt{ab}$ になります。
このとき，$a = b$ という関係が成り立ちます。（等号が成り立つ場合）

［答　　案］

(1)　$a^2 + \dfrac{1}{a^2} \geqq 2$ の証明

1　（加える2式のそれぞれが正であることを確認）　　◀正の数である確認は必ず必要

2　（「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して不等式を証明する）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □　【式と証明　No. 6（6／6）】　－〈2枚目／2枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2)　$\chi + \dfrac{4}{\chi}$ の最小値

1　（加える2式のそれぞれが正であることを確認）　　◀正の数である確認は必ず必要

2　（「相加平均≧相乗平均」の式を作り，それを利用して最小値を求める）

相加平均と相乗平均の大小関係より，

3　（等号が成り立つ場合を示す）　　◀等号が成り立つ場合については，欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは，