

等式の証明

★解法の技術★

$(1+x)^n$  の展開式を利用して、次の等式を証明しなさい。

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n = 2^n$$

【考え方】二項定理を利用する証明問題は、

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + {}_nC_nx^n$$

が与えられた式になるように、 $x$  に数を代入する。

[答 案]

二項定理を用いて  $(1+x)^n$  を展開すると、

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \dots + {}_nC_nx^n$$

この式に  $x=1$  を代入すると、

◀  $(1+x)^n = 2^n$  にするために、 $x=1$  を代入する

$$(1+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot 1 + {}_nC_2 \cdot 1^2 + \dots + {}_nC_n \cdot 1^n$$

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n$$

したがって、与えられた等式は成立する。

◇ 《等式の証明》 学力化 → / ,

--- ★理解のチェック★ ---

$(1+x)^n$  の展開式を利用して、次の等式を証明しなさい。

$${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \dots + (-1)^n {}_nC_n = 0$$

[答 案]

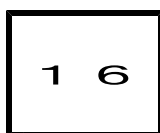
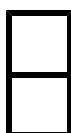
二項定理を用いて  $(1+x)^n$  を展開すると、

$$(1+x)^n =$$

この式に  $x = [ \quad ]$  を代入すると、 ◀  $(1+x)^n = [ \quad ]$  にするために、 $x = [ \quad ]$  を代入する

したがって、与えられた等式は成立する。

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

**4** 二項定理（その3）

（2 / 4） ■ 二項定理の応用② ■

◇ 《等式の証明》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

$(1 + x)^n$  の展開式を利用して、次の等式を証明しなさい。

$${}_n C_0 + 2 {}_n C_1 + 2^2 {}_n C_2 + \cdots + 2^n {}_n C_n = 3^n$$

[答 案]

二項定理を用いて  $(1 + x)^n$  を展開すると、

したがって、与えられた等式は成立する。

◇ 《等式の証明》 **学力化** → / ,

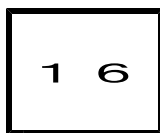
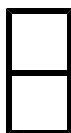
★演習★【2】

二項定理を利用して、次の等式を証明しなさい。

$${}_n C_0 - \frac{{}_n C_1}{2} + \frac{{}_n C_2}{2^2} - \cdots + (-1)^n \frac{{}_n C_n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

[答 案]

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

**4** 二項定理（その3）

(3/4) ■ 二項定理の応用② ■

◇ 《等式の証明》 **学力化** → / ,

★演習★【3】

二項定理を利用して、次の等式を導きなさい。

$$2^n {}_n C_0 - 2^{n-1} {}_n C_1 + 2^{n-2} {}_n C_2 + \dots + (-1)^n {}_n C_n = 1$$

【考え方】二項定理を利用して、 $(1+x)^n$  を展開すると、

$$(1+x)^n = {}_n C_0 \cdot 1^n \cdot x^0 + {}_n C_1 \cdot 1^{n-1} x^1 + \dots$$

$(1+x)^n = 1$  にするために、 $x=0$  を代入して…

$$(1+0)^n = {}_n C_0 \cdot 1^n \cdot 0^0 + {}_n C_1 \cdot 1^{n-1} 0^1 + \dots$$

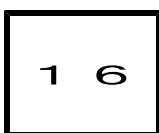
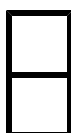
$$1 = \underbrace{1^n}_1 {}_n C_0 + {}_n C_1 + \dots$$

↑  $2^n$  の項が出てこない。よって、証明不可！

$2^n$  の項が出てくればいいのだから、

$(2+x)^n = \dots$  の二項定理を作って、これを利用する。

[答 案]



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

**4** 二項定理（その3）

（4 / 4） ■ 二項定理の応用② ■

◇ 《等式の証明》 **学力化** → / ,

★演習★【4】

二項定理を利用して、次の等式を証明しなさい。

$n$  が奇数のとき

$${}_n C_0 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_{n-1} = {}_n C_1 + {}_n C_3 + \cdots + {}_n C_n$$

【考え方】これまで、右辺が(数) <sup>$n$</sup> 、または数の場合について、二項定理を利用して証明してきたが、この問題はその形をとっていない。

その形をとっていないなら、その従来形をとるように式を変形すればよい。（自分のペースにもってきて証明する。）

すなわち、右辺の項をすべて、左辺へ移項し、左辺=0の形にしてから、二項定理を利用して証明すればよい。

条件「 $n$  が奇数のとき」の使い方： $(-1)^{n-1} = 1$ 、 $(-1)^n = -1$

[答 案]