

16

第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(1/5) ■ 判別式による最大・最小(2) ■

判別式による最大・最小(2)

◇ 《判別式による最大・最小(2)》 学力化 →

★解法の技術★

(1) 関数 $y = 2x^2 - 5x + 1$ の値域を、この等式を満たす実数 x が存在するような y の値の範囲として求めよ。

(2) 関数 $y = \frac{3x}{x^2 + x + 1}$ の値域を求めよ。

【考え方】(1) 2次関数の値域は、普通は標準形に直して求めるが、No.15同様に、実数条件($D \geq 0$)を利用して求める方法もある。

x, y について整理すると、

$$2x^2 + 5x + (1 - y) = 0$$

◀ x の2次方程式

ここで、 x は実数であるから、この2次方程式は実数解をもつ。したがって、実数解をもつ $\Leftrightarrow D \geq 0$ を利用すると、 y の値の範囲が求められる。

◀ 判別式は y についての不等式になるから。

(2) このような分数の形をした関数は数学Iの範囲外だが、(1)の方法が使える。

x, y の等式を分母を払って、 x について整理すると、

$$yx^2 + (y - 3)x + y = 0$$

◀ $y \neq 0$ のとき x の2次方程式

x の値は実数であるから、 $y \neq 0$ のとき、 $D \geq 0$

$y = 0$ のとき、判別式は使えないから、別扱いにして調べる。

[答 案]

(1) 関数 $y = 2x^2 - 5x + 1$ の値域を求める

① (与式を x について整理する)

◀ 理由は【考え方】(1)を参照。

$y = 2x^2 - 5x + 1$ を x についての2次方程式とみて整理すると、

$$2x^2 - 5x + (1 - y) = 0$$

② (実数解条件を使って、 y の範囲を求める)

x は実数であるから、この x の2次方程式は実数解をもつ。

◀ $D \geq 0$ となるという意味。

したがって、この2次方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - y) \\ &= 17 + 8y \end{aligned}$$

$D \geq 0$ より、 $17 + 8y \geq 0$ であるから、 $y \geq -\frac{17}{8}$

③ (答をまとめる)

よって、求める値域は $y \geq -\frac{17}{8}$

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【 2次関数と方程式・不等式 No. 16 (1/5) 】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

(2) 関数 $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$ の値域を求める

◀ y を k とみなすとNo.15と同じ問題になる。

値域を求めるとは、最小値と最大値を求めることと同じ。

① (与式を x について整理する)

◀ 理由は【考え方】(1)(2)を参照。

x が実数のとき、与式の分母について、

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$$

◀ 平方完成(分母が0でないことを確認するため)

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0$$

◀ (分母) $\neq 0$ であるから分母を払うことができる。

$y = \frac{3x}{x^2+x+1}$ の両辺に x^2+x+1 をかけて、

$$y(x^2+x+1) = 3x$$

x について整理すると、

$$\underline{yx^2 + (y-3)x + y = 0} \quad \dots \textcircled{1}$$

◀ この方程式が実数解 x をもつ条件を求める。

② (実数解条件を使って、 y の範囲を求める)

(i) $y \neq 0$ のとき、

x は実数であるから、 x の2次方程式①は実数解をもつ。

◀ $D \geq 0$ となるという意味。

したがって、2次方程式①の判別式を D とすると、

$$D = (y-3)^2 - 4 \cdot y \cdot y$$

$$= y^2 - 6y + 9 - 4y^2$$

$$= -3y^2 - 6y + 9$$

$$= -3(y^2 + 2y - 3) = -3(y+3)(y-1)$$

$D \geq 0$ より、 $-3(y+3)(y-1) \geq 0$ であるから、 $(y+3)(y-1) \leq 0$

よって、 $y \neq 0$ に注意して解くと、 $-3 \leq y < 0$ 、 $0 < y \leq 1$

◀ $y \neq 0$

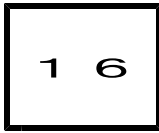
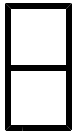
(ii) $y = 0$ のとき、

①は $3x = 0$ となり、実数解 $x = 0$ をもつ。

◀ $y = 0$ のときも実数解をもつ。

③ (答をまとめる)

(i), (ii) から、求める値域は $-3 \leq y \leq 1$



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(2/5) ■ 判別式による最大・最小(2) ■

◇ 《判別式による最大・最小(2)》 **学力化** → / ,

-----★理解のチェック★【1】-----

実数 x, y が方程式 $2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$ を満たすとき、 x のとりうる最大の値を求めよ。 [類 東京大]

【考え方】与式を y の2次方程式とみなして整理し、その判別式をとると、 x の不等式となり、 x の範囲を求めることができる。

[答 案]

1 (与式を y について整理する)

◀理由は【考え方】(1)を参照。

$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$ を y についての2次方程式とみて整理すると、

2 (実数解条件を使って、 x の範囲を求める)

y は実数であるから、この y の2次方程式は実数解をもつ。

◀ $D \geq 0$ となるという意味。

したがって、この2次方程式の判別式を D とすると、

$$D =$$

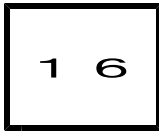
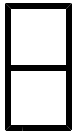
$D \geq 0$ より、

これを解くと、

3 (答をまとめる)

よって、 x のとりうる最大の値は _____

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(3/5) ■ 判別式による最大・最小(2) ■

◇ 《判別式による最大・最小(2)》 **学力化** → /

★理解のチェック★ **【2】**

関数 $y = \frac{8x+4}{x^2-2x+5}$ の値域を求めよ。

[東京理科大]

【考え方】 No. 16 (1/5) (2) とまったく同じ考え方で解ける。

◀ y を k とみなすと No. 15 と同じ問題になる。

値域を求めるとは、最小値と最大値を求めることと同じ。

[答 案]

1 (与式を x について整理する)

◀ x の2次方程式の判別式から x の値の範囲を求めるから。

(値域)

◀ 平方完成(分母が0でないことを確認するため)

◀ (分母) $\neq 0$ であるから分母を払うことができる。

◀ この方程式が実数解 x をもつ条件を求める。

2 (実数解条件を使って、 y の範囲を求める)

(i)

◀ $D \geq 0$ となるという意味。

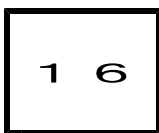
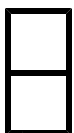
◀ $y \neq 0$

(ii)

◀ $y=0$ のときも実数解をもつ。

3 (答をまとめる)

(i), (ii) から、求める値域は _____



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(4/5) ■ 判別式による最大・最小(2) ■

◇ 《判別式による最大・最小(2)》 **学力化** → /

★演習★【1】

$\frac{x-1}{x^2+3}$ の最大値, 最小値とそのときの x の値を求めよ。

【考え方】 与えられた式を「 $=k$ 」とおき, 式を整理する。

x が実数である条件から, 判別式 $D \geq 0$ を利用して,

$k (= \frac{x-1}{x^2+3})$ のとる値の範囲を考える。

◀要するに, No. 16 (1/5) (2) で, y を k に置き換えると同じ解き方で解ける。

また, x の値の求め方は, No. 15 (1/5) ③を参照。

[答 案]

① (与式を k とおき, x について整理する)

② (実数解条件を使って, k の範囲を求める)

(i)

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 16 (4 / 5) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚〉

↗ (前のページからのつづき)

(ii)

3 (x の値を求める)

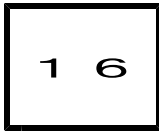
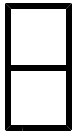
4 (答をまとめる)

以上から, $x =$ _____ のとき最大値 _____

$x =$ _____ のとき最小値 _____

をとる。

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(5 / 5) ■ 判別式による最大・最小(2) ■

◇ 《判別式による最大・最小(2)》 **学力化** → / .

★演習★【2】

$\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$ の最大値, 最小値とそのときの x の値を求めよ。

[答 案]

1 (与式を k とおき, x について整理する)

2 (実数解条件を使って, k の範囲を求める)

(i)

(ii)

(次のページへつづく) →

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 1 6 (5 / 5) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚〉

↗ (前のページからのつづき)

3 (x の値を求める)

4 (答をまとめる)

以上から, $x =$ _____ のとき最大値 _____

$x =$ _____ のとき最小値 _____

をとる。