



1 5

第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(1/5) ■ 判別式による最大・最小(1) ■

判別式による最大・最小(1)

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 学力化 →

★解法の技術★

実数  $x, y$  が  $x^2 + (y - 1)^2 = 5$  を満たすとき、 $2x - y$  の最大値と最小値、およびそのときの  $x, y$  の値を求めよ。 [類 法政大]

【考え方】条件つき2変数関数の最大・最小の問題では、条件の式を使って文字を減らす、というのが解法の基本である。

しかし、この問題のように、条件式  $x^2 + (y - 1)^2 = 5$  を  $x$  または  $y$  について解き、 $2x - y$  に代入しようとする...

たとえば、 $x^2 + (y - 1)^2 = 5$  を  $x$  について解いて、 $x = \pm \sqrt{5 - (y - 1)^2}$  これを  $2x - y$  に代入して、 $2(\pm \sqrt{5 - (y - 1)^2}) - y$  となると、まず、解けない。

そこで、逆に、 $2x - y = k$  とおき、これを条件式とみて文字を減らす。

$y$  を消去すると、 $x^2 + (2x - k - 1)^2 = 5$  これは  $x$  の2次方程式である。

ここで、 $x$  は実数であるから、この2次方程式は実数解をもつ。 したがって、実数解をもつ  $\iff D \geq 0$  を利用すると、 $k$  つまり  $2x - y$  の値の範囲が求められる。 ◀  $D$  をとっていい理由

すなわち、判別式は係数についての関係式だから、 $k$  を  $x$  の係数にすれば  $x$  の判別式を作ること、 $k$  の範囲を調べることができる。 ◀ スーパーテクニク

[答 案]

① (文字を減らす)

$2x - y = k$  とおき、 $y$  について解くと、 ◀  $x, y$  が実数だから  $k$  も実数

$$y = 2x - k \quad \dots \textcircled{1}$$

これを  $x^2 + (y - 1)^2 = 5$  に代入すると、

$$x^2 + (2x - k - 1)^2 = 5$$

整理して、

$$x^2 + (2x)^2 + (-k)^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-k) + 2 \cdot (-k) \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot 2x - 5 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + k^2 + 1 - 4kx + 2k - 4x - 5 = 0$$

$$\underline{5x^2 - 4(k+1)x + k^2 + 2k - 4 = 0} \quad \dots \textcircled{2}$$

□ □ 【 2次関数と方程式・不等式 No. 15 (1/5) 】 - 〈 2枚目 / 2枚 〉

➡ (前のページからのつづき)

2 (実数解条件を使って、kの範囲を求める)

$x$  は実数であるから、 $x$  の2次方程式②は実数解をもつ。  
したがって、2次方程式②の判別式をDとすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-2(k+1)\}^2 - 5(k^2 + 2k - 4) \\ &= 4k^2 + 8k + 4 - 5k^2 - 10k + 20 \\ &= -k^2 - 2k + 24 \\ &= -(k^2 + 2k - 24) \\ &= -(k+6)(k-4) \end{aligned}$$

$D \geq 0$  より、 $-(k+6)(k-4) \geq 0$  であるから、 $(k+6)(k-4) \leq 0$   
よって、 $-6 \leq k \leq 4$

したがって、 $2x - y$  は、最小値  $-6$ 、最大値  $4$  をとる。

◀  $k = 2x - y$

◀  $D \geq 0$  となるという意味。

3 ( $x$  と  $y$  の値を求める)

$k = -6$ 、 $4$  のとき、 $D = 0$  で、②は重解  $x = -\frac{-4(k+1)}{2 \cdot 5} = \frac{2(k+1)}{5}$  をもつ。

よって、

・  $k = 4$  のとき、 $x = \frac{2(4+1)}{5} = 2$

①から、 $y = 2 \times (2) - (4) = 0$

・  $k = -6$  のとき、 $x = \frac{2(-6+1)}{5} = -2$

①から、 $y = 2 \times (-2) - (-6) = 2$

◀  $a x^2 + b x + c = 0$   
の重解は、 $x = \frac{-b}{2a}$

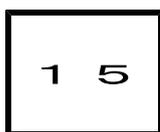
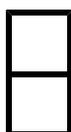
4 (答をまとめる)

以上から、 $x = 2$ 、 $y = 0$  のとき最大値  $4$

$x = -2$ 、 $y = 2$  のとき最小値  $-6$

をとる。

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



## 第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

### 3 2次不等式の応用(その4)

(2/5) ■ 判別式による最大・最小(1) ■

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 **学力化** → / ,

-----★理解のチェック★-----

実数  $x, y$  が  $x^2 + xy + y^2 = 1$  を満たすとき、 $2x + y$  の最大値と最小値、およびそのときの  $x, y$  の値を求めよ。

-----  
[答 案]

**1** (文字を減らす)

$2x + y = k$  とおき、 $y$  について解くと、

◀  $x, y$  が実数だから  $k$  も実数

**2** (実数解条件を使って、 $k$  の範囲を求める)

(次のページへつづく) ↗

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 1 5 ( 2 / 5 ) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚 〉

↗ ( 前のページからのつづき )

3 (  $x$  と  $y$  の値を求める )

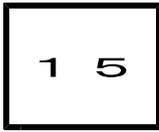
4 ( 答をまとめる )

以上から,  $x =$  \_\_\_\_\_ ,  $y =$  \_\_\_\_\_ のとき最大値

$x =$  \_\_\_\_\_ ,  $y =$  \_\_\_\_\_ のとき最小値

をとる。

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



## 第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

### 3 2次不等式の応用(その4)

(3/5) ■ 判別式による最大・最小(1) ■

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 **学力化** → / .

#### ★演習★【1】

$x, y$  を実数として、 $x^2 + y^2 = 8$  のとき、 $x + y$  の最大値、最小値と、そのときの  $x, y$  の値を求めよ。

[答 案]

1 (文字を減らす)

$x + y = k$  とおき、 $y$  について解くと、

◀  $x, y$  が実数だから  $k$  も実数

2 (実数解条件を使って、 $k$  の範囲を求める)

(次のページへつづく) ↗

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 1 5 ( 3 / 5 ) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚〉

↗ ( 前のページからのつづき )

3 (  $x$  と  $y$  の値を求める )

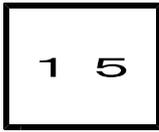
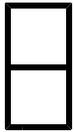
4 ( 答をまとめる )

以上から,  $x =$  \_\_\_\_\_ ,  $y =$  \_\_\_\_\_ のとき最大値

$x =$  \_\_\_\_\_ ,  $y =$  \_\_\_\_\_ のとき最小値

をとる。

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(4/5) ■ 判別式による最大・最小(1) ■

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 **学力化** → / .

★演習★【2】

実数  $x, y$  が  $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$  を満たすとき、 $x + y$  の最大値と最小値、およびそのときの  $x, y$  の値を求めよ。

[答 案]

1 (文字を減らす)

2 (実数解条件を使って、 $k$  の範囲を求める)

(次のページへつづく) →

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

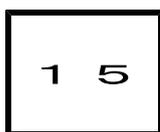
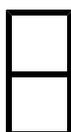
□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 1 5 ( 4 / 5 ) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚〉

↗ ( 前のページからのつづき )

3 (  $x$  と  $y$  の値を求める )

4 ( 答をまとめる )

以上から,



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(5 / 5) ■ 判別式による最大・最小(1) ■

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 **学力化** → / .

★演習★【3】

実数  $x, y$  が  $x^2 - 2xy + 2y^2 = 2$  を満たすとき、

- (1)  $x$  のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。
- (2)  $2x + y$  のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

[答 案]

(1)  $x$  のとりうる値の最大値と最小値

① (与式を  $y$  について整理する)

◀  $y$  の2次方程式の判別式を使って  $x$  の範囲を求めるため。

▲問題はこれを求めよと言っている。

② (実数解条件を使って、 $x$  の範囲を求める)

◀①を  $y$  の2次方程式をみる。

③ (答をまとめる)

したがって、 $x$  のとりうる値の最大値は \_\_\_\_\_ , 最小値は \_\_\_\_\_

(2)  $2x + y$  のとりうる値の最大値と最小値

① (文字を減らす)

ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 1 5 ( 5 / 5 ) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚〉

↗ ( 前のページからのつづき )

2 ( 実数解条件を使って,  $k$  の範囲を求める )

3 (  $x$  と  $y$  の値を求める )

4 ( 答をまとめる )

以上から,