4

山形大学入試問題・前期　　2024.11.12(火)

２０２０年度　数学

（１／１）■　数学Ｂ　数列　■

【第４問】

第３項が５，第７項が１３である等差数列を$\{a_n\}$とし，数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとする。また，

$$b_1 = 19,\qquad b_{n+1} = b_n - 2^{n-1}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められた数列を$\{b_n\}$とし，数列$\{b_n\}$の初項から第n項までの和をT_nとする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項とS_nを求めよ。

(2)　数列$\{b_n\}$の一般項とT_nを求めよ。

(3)　$U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ。

★(4)　$V_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$ を求めよ。

【　入試問題を解くための資料　】

【Ａ】（入試情報）

山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，
学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

【Ｂ】（出題情報）

第４問の出題項目	数学Ｂ　数列
第４問の出題内容	（等差数列）×（等比数列）型の数列の和

＊今回は，第４問のうち(4)のみの解答です。　◀(1)(2)(3)は別ファイルです。

【Ｃ】（対策情報）

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。
だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

●　第４問(4)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

数学Ⅰ　「２次関数と方程式・不等式」No.２０（１／５）　◀絶対値記号のはずし方

■　「２次関数と方程式・不等式」の学習計画書

Link：→｜高校数学 ＭＥＮＵ｜：数学Ⅰ【７】２次関数と方程式・不等式

（次のページへつづく）↗

【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第４問 (4)】　－〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

【　入試問題の解き方　】

【考え方】(4)　絶対値をはずして数列の和を求める問題です。
場合分けは，(1)と(2)の結果を利用します。すなわち，
(1)より，$a_n = 2n - 1 > 0$
(2)より，$b_n = 20 - 2^{n-1}$ で，$1 \leqq n \leqq 5$ のときは，$b_n > 0$
$6 \leqq n$ のときは，$b_n < 0$

となるから，　$V_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$　…①は

（ⅰ）　①で，$a_n b_n > 0$　つまり，$1 \leqq n \leqq 5$ のとき
（ⅱ）　①で，$a_n b_n < 0$　つまり，$6 \leqq n$ のとき
の２つに場合分けして，V_n を求めます。

ここで注意することは，（ⅱ）の場合は，$k = 6$ から $k = n$ までの和ではなく，
V_n は，$k = 1$ から $k = n$ までの和であるということです。
だから，$k = 1$ から $k = 5$ の和と $k = 6$ から $k = n$ までの和を別々に求め，
それらの和を求めなければなりません。
これをΣを使ってどのように表現するかが，この問題が解けるかどうかの
”分岐点”となります。（どのようにして解くかは，答案をご覧下さい。）

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

＊ この第４問 (4) の問題では…

上の【考え方】で説明したように，場合分けに際して，
$1 \leqq n \leqq 5$ のときは，V_n は(3)の結果と同じとなり，
$6 \leqq n$ のときは，(1)と(2)の結果を使って場合分けをし，V_n の中に(3)の結果を組み込んで答えます。

山形大学らしい問題です。
この解答のプロセスの構造をしっかりと学びとっておくと，この年度以降の問題を解くときの解法のストラテジーとして非常に役に立ちます。

（次のページへつづく）↗

□ □　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第４問 (4)】　－〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

［答　　案］

$V_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$　…①

（ｉ）　①で，$a_n b_n > 0$　のとき，

つまり，　$a_n = 2n - 1 > 0$，　$b_n = 20 - 2^{n-1} > 0$　より，

１≦ｎ≦５のとき，　$|a_n b_n| = a_n b_n$ だから，

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = U_n = 20n^2 - (2n-3)\cdot 2^n - 3$$

◀ (3) の結果より。

（ii）　①で，$a_n b_n < 0$　のとき，

つまり，　$a_n = 2n - 1 > 0$，　$b_n = 20 - 2^{n-1} < 0$　より，

６≦ｎのとき，　$|a_n b_n| = -a_n b_n$ だから，

$$V_n = \sum_{k=1}^{5} a_k b_k + \sum_{k=6}^{n} (-a_k b_k)$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{5} a_k b_k - \sum_{k=6}^{n} a_k b_k$$

$$V_n = \sum_{k=1}^{5} a_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{5} a_k b_k \right)$$

$$V_n = 2\sum_{k=1}^{5} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

$$V_n = 2U_5 - U_n$$

$$V_n = 2\{20\cdot 5^2 - (2\cdot 5 - 3)\cdot 2^5 - 3\} - \{20n^2 - (2n-3)\cdot 2^n - 3\}$$

$$V_n = (2n-3)\cdot 2^n - 20n^2 + 549$$

（ｉ），（ii）より，

$$V_n = \begin{cases} 20n^2 - (2n-3)\cdot 2^n - 3 & (1 \leqq n \leqq 5) \\ (2n-3)\cdot 2^n - 20n^2 + 549 & (6 \leqq n) \end{cases}$$