｜メニューへ戻る｜

４

山形大学入試問題・前期　　2024.11.9(土)

# ２０２０年度　数学

（１／１）■　数学Ｂ　数列　■

## 【第４問】

第３項が５，第７項が１３である等差数列を$\{a_n\}$とし，数列$\{a_n\}$の初項から第$n$項までの和を$S_n$とする。また，

$$b_1=19,\quad b_{n+1}=b_n-2^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められた数列を$\{b_n\}$とし，数列$\{b_n\}$の初項から第$n$項までの和を$T_n$とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項と$S_n$を求めよ。

(2)　数列$\{b_n\}$の一般項と$T_n$を求めよ。

★(3)　$U_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$ を求めよ。

(4)　$V_n=\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|$ を求めよ。

## 【　入試問題を解くための資料　】

### 【Ａ】（入試情報）

山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

| | | |
|---|---|---|
| 人文社会科学部 | 第１，２，３問 | （　９０分） |
| 理学部 | 第１，３，４，５問 | （１２０分） |
| 医学部 | 第１，３，５，６問 | （１２０分） |
| 農学部 | 第１，２，３，４問 | （１２０分） |

### 【Ｂ】（出題情報）

| | |
|---|---|
| 第４問の出題項目 | 数学Ｂ　数列 |
| 第４問の出題内容 | （等差数列）×（等比数列）型の数列の和 |

＊今回は，第４問のうち(3)のみの解答です。　◀(1)(2)(4)は別ファイルです。

### 【Ｃ】（対策情報）

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

● 第４問(3)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

数学Ｂ　「いろいろな数列」　学習資料《Σ（シグマ）》　◀Σ（Σ）の公式の一覧表

No.７（１／７）　◀（等差数列）×（等比数列）の和

■　「等差数列・等比数列」の学習計画書

Link：→｜高校数学 ＭＥＮＵ｜：数学Ｂ【２】いろいろな数列

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第４問 (3)】　ー〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

## 【　入試問題の解き方　】

【考え方】(3)　数列の和(Σ)の問題です。

数列 $\{a_n\}$ や数列 $\{b_n\}$ の一般項は (1) と (2) の結果をそのまま使えます。
$a_n b_n$ を一般項に書きかえて計算すると，
「等差数列の和ー(等差数列)×(等比数列)の和」
の形になります。
「(等差数列)×(等比数列)の和」は特殊な計算をするので，これは覚えておかなければ使えません。（数専ゼミの教材で学ぶことができます。）
「等差数列の和」は公式をそのまま適用するだけで計算できます。。
なお，Σの公式は３乗までは覚えておきましょう。（数専ゼミの教材で学べます。）

【山形大学入試出題原理】
山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

＊この第４問 (3) の問題では…

Σを求める $a_n b_n$ の一般項は，(1) と (2) の結果をそのまま使えます。

入試問題としては，ふつう，「$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ。」という形で出題されるのでしょうが，

山形大学の入試問題の出題形式の”こだわり”で，$a_n$ は (1) で，$b_n$ は (2) で求めさせ，(3) ではその結果を利用して解かせるという形式になっています。非常に解きやすくなっています。

［答　　案］

$\boxed{0}$（データの整理／$a_k b_k$ を一般項で表す）

(1) より，等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = 2n-1$

(2) より，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項は，$b_n = 20 - 2^{n-1}$

よって，

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\cdot(20-2^{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{(40k-20)-(2k-1)\cdot 2^{k-1}\}$$　◀ (2k − 1)を後の(　)にかけ入れる。

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (40k-20)}_{\boxed{1}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\cdot 2^{k-1}}_{\boxed{2}} \quad \cdots ①$$　◀ Σ のかけ入れ。

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜



↗（前のページからのつづき）

1 （①の前項の「等差数列の和」を求める）

$$\sum_{k=1}^{n}(40k-20)=\sum_{k=1}^{n}40k-\sum_{k=1}^{n}20$$

$$=40\times\frac{1}{2}n(n+1)-20n$$

◀等差数列の和の公式を利用

$$=20n^2 \quad \cdots②$$

2 （①の後項の「（等差数列）×（等比数列）の和」を求める）

$W_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot 2^{k-1}$ とおくと，

$$W_n=1\cdot1+3\cdot2+5\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots+(2n-3)\cdot2^{n-2}+(2n-1)\cdot2^{n-1}$$

$$-)\ 2W_n=\qquad 1\cdot2+3\cdot2^2+5\cdot2^3+\cdots\qquad+(2n-3)\cdot2^{n-1}+(2n-1)\cdot2^n$$

$$-W_n=1\cdot1+\underline{2\cdot2+2\cdot2^2+2\cdot2^3+\cdots+2\cdot2^{n-1}}-(2n-1)\cdot2^n$$

▲初項２，公比２の等比数列の第２項から第ｎ項までの和
　＝（初項から第ｎ項までの和）－（初項）

$$-W_n=1+\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-2-(2n-1)\cdot2^n$$

$$-W_n=-1+2\cdot2^n-2-(2n-1)\cdot2^n$$

$$-W_n=(3-2n)\cdot2^n-3$$

$$W_n=(2n-3)\cdot2^n+3 \quad \cdots③$$

3 （答をまとめる）

②と③を①に代入して，

$$U_n=20n^2-(2n-3)\cdot2^n-3$$