4

山形大学入試問題・前期　　2024.11.7(木)

２０２０年度　数学

（１／１）■　数学Ｂ　数列　■

【第４問】

第３項が５，第７項が１３である等差数列を$\{a_n\}$とし，数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとする。また，

$$b_1 = 19, \qquad b_{n+1} = b_n - 2^{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められた数列を$\{b_n\}$とし，数列$\{b_n\}$の初項から第n項までの和をT_nとする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項とS_nを求めよ。

★(2)　数列$\{b_n\}$の一般項とT_nを求めよ。

(3)　$U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ。

(4)　$V_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$ を求めよ。

【　入試問題を解くための資料　】

【Ａ】（入試情報）

山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

【Ｂ】（出題情報）

第４問の出題項目	数学Ｂ　数列
第４問の出題内容	（等差数列）×（等比数列）型の数列の和

＊今回は，第４問のうち(2)のみの解答です。　　◀(1)(3)(4)は別ファイルです。

（次のページへつづく）

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・**第４問**(2)】　－〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

【Ｃ】（対策情報）

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。
だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

● 第４問(2)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

数学Ｂ　「漸化式と数学的帰納法」No.４（１／７）～（２／７）　◀階差型漸化式の一般項

数学Ｂ　「等差数列・等比数列」No.９（１／５）～（２／５）　◀等比数列の和

■ 「等差数列・等比数列」の学習計画書

Link：→｜高校数学　ＭＥＮＵ｜：数学Ｂ【１】等差数列・等比数列
：数学Ｂ【３】漸化式と数学的帰納法

【　入試問題の解き方　】

【考え方】(2)　「等比数列の和を含む階差タイプの漸化式」の一般項を求める問題です。

等比数列の和は，項数がｎ－１個という”落とし穴”があります。

- ・等比数列の和の求め方
- ・階差数列のしくみ
- ・階差タイプの漸化式の一般項の求め方

この３つについては，問題を解く前に，きちんと確認しておきましょう。
（数専ゼミの基礎資料については，紹介してあります。）

後半は，等比数列の和を求める基本問題です。

公式に数値をあてはめて解くだけの問題ですが，公式のしくみをきちんと理解していないと間違えます。とりわけ，項数を公式ではどのように表すかを正しく理解しておきましょう。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

＊この第４問(2)の問題では…

(3)や(4)だけの問題であると，答案を組み立てるのが煩雑で見通しがわるくなります。
そこで，(3)と(4)の問題を分割し，(3)と(4)を解くときに使うデータを，(1)と(2)で求めさせています。

（次のページへつづく）↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第４問 (2)】 ー〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

［答　　案］

1 （階差タイプの漸化式の一般項を求める）

$b_1 = 19$，$b_{n+1} = b_n - 2^{n-1}$　（$n = 1, 2, 3, \cdots$）　…①

①より，$b_{n+1} - b_n = -2^{n-1}$ であるから，

$c_n = b_{n+1} - b_n$ とおくと，$c_n = -2^{n-1}$　…②

◀階差数列の一般項

2 （一般項 b_n を求める）

②より，数列 $\{c_n\}$ は，数列 $\{b_n\}$ の階差数列であるから，

$n \geqq 2$ のとき，

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k$$

$$= 19 + \sum_{k=1}^{n-1}(-2^{k-1})$$

$$= 19 - \sum_{k=1}^{n-1}(1 \cdot 2^{k-1})$$

◀初項1，公比2，項数nの等比数列の和

$$= 19 - \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

◀階差数列の項数はn－1個，Σの上端を参照。

$$= 19 - (2^{n-1} - 1) \quad \cdots ③$$

$n = 1$ のとき，

③に $n = 1$ を代入すると，

$b_1 = 20 - 2^{1-1} = 20 - 1 = 19$

となり，$n = 1$ のときも成り立つ。

よって，$b_n = 20 - 2^{n-1}$

3 （等比数列の和を求める）

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(20 - 2^{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 20 - \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot 2^{k-1}$$

◀初項1，公比2，項数nの等比数列の和

$$= 20n - \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1}$$

$$= 20n - 2^n + 1$$