数学Essay_985 **数専ゼミ・山形東原教室**

赤本の解説はなぜ分かりにくいのか？

▶ 2024.11.3(日)

2020年度山形大学前期入試第3問

【第３問】

平面上の△ＡＢＣとその内部の点Ｐが，

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0},\quad |\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=1$$

と満たすとする。また，$k=|\overrightarrow{PA}|$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) k^2を内積 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ を k を用いて表せ。

(3) 直線ＰＡと線分ＢＣの交点をＤとするとき，$\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

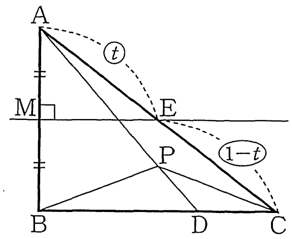
★(4) 線分ＡＢの垂直二等分線と線分ＡＣの交点をＥとするとき，$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(5) △ＡＢＣの面積を k を用いて表せ。

【注】第３問は，人文社会科学部，理学部，医学部，農学部に共通に課された問題です。

「赤本」の解説

(4)についての「赤本」（教学社版）の解説です。



(4) AE：EC＝$t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{PE}=(1-t)\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PC}$$

線分 AB の中点を M とすると

$$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$$

よって $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{PE}-\overrightarrow{PM}=\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{PA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+t\overrightarrow{PC}$

$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$ より

$$\overrightarrow{ME}=\left(\frac{1}{2}-t\right)(-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+t\overrightarrow{PC}$$

$$=(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-1)\overrightarrow{PC}$$

また $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}-(-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC})=2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$

AB⊥ME より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ME}=0$ であるから

$$2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\{(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-1)\overrightarrow{PC}\}=0$$

$$(t-1)|\overrightarrow{PB}|^2+(4t-2)\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+(3t-1)|\overrightarrow{PC}|^2=0$$

$$(t-1)\cdot1^2+(4t-2)\cdot\frac{k^2-5}{4}+(3t-1)\cdot1^2=0$$

$$(k^2-1)(2t-1)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ のなす角を θ とすると

$$\begin{aligned}k^2&=4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+5\\&=4\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta+5\\&=4\cos\theta+5\end{aligned}$$

点 P は △ABC の内部にあるので　$0°<\theta<180°$

すなわち，$-1<\cos\theta<1$ であるから

$$k^2>4\cdot(-1)+5=1$$

よって，①より　$2t-1=0$

つまり　$t=\dfrac{1}{2}$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PE}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}\\&=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC} \quad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

★

生徒Ａ子：「う～っ！
　　　　　なにを言っているのか，さっぱりわからんがね！」
答案を”威嚇”しても，分かるようにはならないと思いますが…。
生徒Ａ子：「なんで，答案の最初に，ｔが出てくるわけ？」
あのねぇ，これって，ベクトルの性質の大原則なの。
ほれ，「どんなベクトルでも２つのベクトルで表現できる」から，
だから，結論のＰＥを２つの仮のベクトルで表しているの。
方程式の未知数みたいなもんと考えてください。
生徒Ａ子：「うむ，
　　　　　アイ，シー！」
”アイ，スィー”じゃないですか？
生徒Ａ子：「ふん！」

この赤本の答案の全体のしくみは，次の４つのステップから成り立っています。

- 点Ｅの位置ベクトルをｔで表す。　◀これは (3) の【考え方】問題をそのまま利用
- ベクトルと結論で使う形 $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ に書きかえる　◀目標の形を作る

・内積＝０よりｔを求める方程式を作る。　　◀ベクトルの内積の性質の利用
・ｔを最初の式に代入して求められている答の形を作る。

全体はｔについての方程式です。
この方程式を解くためにベクトルのいろいろな性質や問題の条件を使いまくります。

生徒Ａ子：「うん，うん，
そのように書いてくれれば，よ～くわかるのにぃ…。
赤本の解説はわかりにくいねぇ。」

「赤本」の限界

例え，赤本の解説を理解でき，覚えたとしても，類似の問題を解くときには使えないでしょう。
解法プロセスが一般化されていないからです。
赤本の解説は，すでに答がわかっている人が，答を”こじつけて”いるだけです。
まっさらな状態で，問題の条件や前問のデータのどこをどのように利用しながら，答へ導いていくのかというプロセスの説明はありません。（受験生が一番ほしいのはこのデータなのです。）
また，解法の全体が”一般化”されていないので，学習した解法を他の問題を解くときに利用することが困難です。。つまり，赤本の解説からは，応用力のある解法を学び取ることは難しいということです。
これらの事情は，赤本に限らず，参考書一般にいえることです。”参考書を勉強しているのに問題が解けるようにはならない”というのは，参考書がこのように作られているからです。
だから，”２周せよ，とか３周せよ”などという根性学習法が巷にはびこっているのです。
一般化できれば１回の学習で済むはずです。

そこで，数専ゼミでは，入試問題（２０２０年度・第３問(4)）の解法を一般化して，応用できる形で作ってみました。赤本の答案と比べてみてください。
（そのために，この記事は印刷することができるように設定してあります。）

◀●■　数専ゼミの教え方　■●▶

【　入試問題の解き方　】

【考え方】(4)　「$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。」と言われても，この形のままでは何をしていいのか分かりません。そこで，(3)の解法と同じ”手”を使ってみます。
(3)は，「線分ＢＣの内分点Ｄは，点Ｐを基点とした位置ベクトルで表せる」ことを教えています。

1　(4)では，条件で「線分ＡＣの交点をＥとせよ」と誘導しています。
これは，(3)の解法から類推すれば，「線分ＡＣの内分点Ｅは，点Ｐを基点とした位置ベクトルで表せる」と言っていることです。ここが，(4)の目標点となります。
そこで，
点ＥはＡＣをｔ：(１－ｔ)に内分する点であるとします。
つまり，ＡＥ：ＥＣ＝ｔ：(１－ｔ)とおき，点Ｐを基点とした位置ベクトル$\overrightarrow{PE}$ を，

ｔを使った内分点の位置ベクトルで表します。…① ◀をt未知数とした方程式のようなものです。

2 あらかじめ，$\overrightarrow{ME}$ と$\overrightarrow{AB}$ を，$\overrightarrow{PB}$ と$\overrightarrow{PC}$ を用いて書きかえておき，

3 「線分ＡＢの垂直二等分線と線分ＡＣの交点をＥとする」とあることから，
”ベクトルで垂直は内積＝０を使う”という原則をそのまま使い，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ME}=0$ 利用することでｔの値を求めます。 ◀方程式を解くプロセスに当たります。
ただし，$\overrightarrow{ME}$ と$\overrightarrow{AB}$ は，$\overrightarrow{PB}$ と$\overrightarrow{PC}$ で書きかえてから内積＝０の式を作ります。
▲答は$\overrightarrow{PB}$ と$\overrightarrow{PC}$ を用いて表さなければならないから。

4 ｔの値が求まったら，それを①の式に代入することで答えが求まります。

＊なお，$\overrightarrow{PA}$ がでてきたらすべて，条件式を使って$\overrightarrow{PB}$ と$\overrightarrow{PC}$ だけの式に書きかえていくことで，式を答として要求されている形に変形することができます。
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$ より，$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$ となります。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

＊この第３問(4)の問題では

(4)は，問題文を読んだだけでは，何をしていいのか分かりません。
しかし，手がかりがないと，問題は解けません…
実は，上の【考え方】で紹介したように，(3)が(4)の誘導問題になっているのです。
(4)の全体は”ｔについての方程式”のようなものですが，その”ｔについての方程式”を立てるときに(3)と同じ”手”を使います。
このような視点から【考え方】や［答　　案］を学習してみてください。”なるほど”と納得できるはずです。

［答　　案］

1 （点Ｅを点Ｐを基点とした位置ベクトルで表す）

点Ｅは線分ＡＣの内分点であるから，ＡＥ：ＥＣ＝t：（１－t）とおくと，

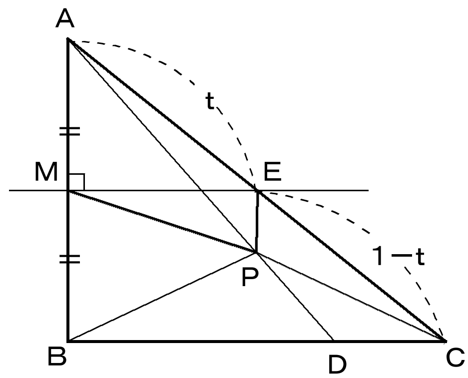
$$\overrightarrow{PE}=\frac{(1-t)\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PC}}{t+(1-t)}$$
$$=(1-t)\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PC}$$
$$=(1-t)(-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC})+t\overrightarrow{PC}$$

◀目的地は，$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と$\overrightarrow{PC}$ を用いて表すこと

▲条件式より，$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$

$$=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}+t\overrightarrow{PB}+2t\overrightarrow{PC}+t\overrightarrow{PC}$$
$$=(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-2)\overrightarrow{PC}\quad\cdots①$$

▲解法はｔの値を求めることへ向かう。



2 （$\overrightarrow{ME}$ と$\overrightarrow{AB}$ を，$\overrightarrow{PB}$ と$\overrightarrow{PC}$ を用いて表す）

線分ＡＢの中点をＭとすると，

$$\overrightarrow{PM}=\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$$

$$=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$$

◀条件式より，$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$

$$=-\overrightarrow{PC}$$

よって，

$$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{PE}-\overrightarrow{PM}$$

◀$\overrightarrow{ME}$ を点Pを基点とする位置ベクトルに書きかえる。

$$=(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-2)\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PC}$$

$$=(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-1)\overrightarrow{PC} \quad \cdots②$$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$$

◀$\overrightarrow{AB}$ を点Pを基点とする位置ベクトルに書きかえる。

$$=\overrightarrow{PB}-(-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC})$$

◀条件式より，$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$

$$=2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}) \quad \cdots③$$

3 （tの値を求める）

◀ベクトル垂直 → 内積＝0 を利用する。

ＡＢ⊥ＭＥより，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ME}=0$であるから，

②と③より，

$$2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\{(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-1)\overrightarrow{PC}\}=0$$

両辺÷２

$$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\{(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-1)\overrightarrow{PC}\}=0$$

$$(t-1)|\overrightarrow{PB}|^2+(3t-1)\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+(t-1)\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+(3t-1)|\overrightarrow{PC}|^2=0$$

$$(t-1)|\overrightarrow{PB}|^2+(4t-2)\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+(3t-1)|\overrightarrow{PC}|^2=0$$

ここで，条件より，$|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2=1$

(1) の結果を用いて，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\dfrac{k^2-5}{4}$ であるから，

$$(t-1)\cdot1^2+(4t-2)\cdot\frac{k^2-5}{4}+(3t-1)\cdot1^2=0$$

$$(4t-2)+(4t-2)\cdot\frac{k^2-5}{4}=0$$

$$(4t-2)\left(1+\frac{k^2-5}{4}\right)=0$$

$$(2t-1)\left(\frac{k^2-1}{4}\right)=0$$

$$(2t-1)(k^2-1)=0 \quad \cdots④$$

ここで，

(1) より，$\overrightarrow{PB}$ と$\overrightarrow{PC}$ のなす角をθとすると，

$$k^2=4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+5$$

$$=4\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta+5$$

$$=4\cos\theta+5$$

◀ k^2を消去する。

$k^2\neq\pm1$ であれば，④の両辺を k^2-1 で割って k^2を消去できる。

(1)より，k^2-1は$\cos\theta$ の関数であり，$-1<\cos\theta<1$から，k^2の取りうる値の範囲が特定できる。

また，
点Ｐは△ＡＢＣの内部にあるので，０°＜θ＜１８０°
すなわち，－１＜$\cos\theta$＜１であるから，
$k^2>4\cdot(-1)+5=1$

$k^2\neq\pm1$であるから，④の両辺をk^2-1で割って

$2t-1=0$より，$t=\dfrac{1}{2}$　…⑤

4（答をまとめる）

⑤を①に代入して，

$$\overrightarrow{PE}=\left(\frac{1}{2}-1\right)\overrightarrow{PB}+\left(3\times\frac{1}{2}-2\right)\overrightarrow{PC}$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$$

したがって，

$$\overrightarrow{PE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$$

★