	３

山形大学入試問題・前期　　2024.11.2(土)

２０２０年度　数学

（１／１）■　数学Ｂ　ベクトル　■

【第３問】

平面上の△ＡＢＣとその内部の点Ｐが，

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}, \quad |\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=1$$

と満たすとする。また，$k=|\overrightarrow{PA}|$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　k^2を内積 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ を kを用いて表せ。

(3)　直線ＰＡと線分ＢＣの交点をＤとするとき，$\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(4)　線分ＡＢの垂直二等分線と線分ＡＣの交点をＥとするとき，$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

★(5)　△ＡＢＣの面積を kを用いて表せ。

【　入試問題を解くための資料　】

【Ａ】（入試情報）

山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

【Ｂ】（出題情報）

第３問の出題項目	数学Ｂ　ベクトル　◀2024年度からは「数学C」
第３問の出題内容	$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たす△ＡＢＣの内部の点Ｐ

＊今回は，第３問のうち(5)のみの解答です。　◀(1)(2)(3)(4)は別ファイルです。

【Ｃ】（対策情報）

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

(1)　第３問(5)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル教材)

数学Ｂ　「ベクトルとその演算」　No.７（１／４）（４／４）　◀ベクトルの平行

No.２４（１／４）　◀ベクトルの和の大きさ

(2)　「ベクトルとその演算」の学習計画書

Link：→｜高校数学 ＭＥＮＵ｜：数学Ｃ【１】ベクトルとその演算

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第３問(5)】　ー〈２枚目／４枚〉

↗（前のページからのつづき）

【　入試問題の解き方　】

【考え方】(5)　三角形の面積といえば，小学算数からなじんできた「底辺×高さ÷２」です。まず，これでいけるかどうかを確かめます。

$$\triangle ABC = |\overrightarrow{BC}| \times |\overrightarrow{AB}| \div 2 \quad \cdots ①$$

です。ただし，これが言えるのは，∠ＡＢＣ＝９０°の場合だけです。そこで最初に，∠ＡＢＣ＝９０°であることを証明します。（(4)②を利用します。）
次に，問題が「△ＡＢＣの面積を k を用いて表せ。」となっているから，
k または実数で表される大きさをもつベクトルは，条件や(1)～(4) では何かと，調べます。

条件より，$|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = 1$　から，$|\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2 = 1$

(1)より，$k^2 = 4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} + 5$　から，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} = \dfrac{k^2-5}{4}$

よって，$\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{AB}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ のベクトルで書きかえて，①に代入すれば
△ＡＢＣの面積を $|\overrightarrow{PB}|$ と $|\overrightarrow{PC}|$ を用いて表すことができます。

【注】これは「赤本」の解答とは異なります。
「赤本」の解答はなぜそのような考え方で解くのかがわかりずらいので，問題の条件をみれば，だれでも簡単に”発想”できる解法を紹介しました。

【注】他方，「ベクトル，三角形，面積」ときたら，「ベクトルを利用した三角形の面積の公式」ときます。これは，公式にデータを代入するだけで求めることができますので，やってみてください。
（赤本には，「別解」として紹介してあります。

【山形大学入試出題原理】
山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

＊ この第３問(5)の問題では

△ＡＢＣの面積を公式を使って求めるためには，∠ＡＢＣ＝９０°でなければなりません。
(4)の条件や結果を利用することでこれを証明することができます。

また，問題が「△ＡＢＣの面積を k を用いて表せ。」となっているから，
k または実数で表される大きさをもつベクトルが，条件や(1)～(4)で用意されているはずです。条件と(1)の結果の中にあります。これを利用して解いて下さいね，と教えくれています。
そこで，これを使える解法をとります。

（次のページへつづく）↗

□ □　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第３問 (5)】　－〈３枚目／４枚〉

↗（前のページからのつづき）

［答　　案］

0（∠ＡＢＣ＝９０° を調べる）

(4)②より，

$\overrightarrow{ME}=(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-1)\overrightarrow{PC}$

$t=\dfrac{1}{2}$ であるから，

$\overrightarrow{ME}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PB}|+\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PC}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{PC}|-|\overrightarrow{PB}|)=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

よって，ＭＥ // ＢＣ

(4) の条件より，ＡＢ⊥ＭＥであるから，ＡＢ⊥ＢＣ

よって，△ＡＢＣは，∠ＡＢＣ＝９０° の直角三角形である。

よって，△ＡＢＣ＝$|\overrightarrow{BC}|\times|\overrightarrow{AB}|\div 2$　…①

問題が「△ＡＢＣの面積を k を用いて表せ。」となっているから，

k または実数で表される大きさをもつベクトルを，条件や(1)～(4) の中に捜すと，

条件より，$|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=1$ から，$|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2=1$

(1)の結果より，$k^2=4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+5$ から，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\dfrac{k^2-5}{4}$

よって，$\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{AB}$ を，$\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ に書きかえ，$|\overrightarrow{BC}|$ と $|\overrightarrow{AB}|$ を k を用いた式で表し，

これらを　①に代入して，△ＡＢＣの面積を k を用いて表します。

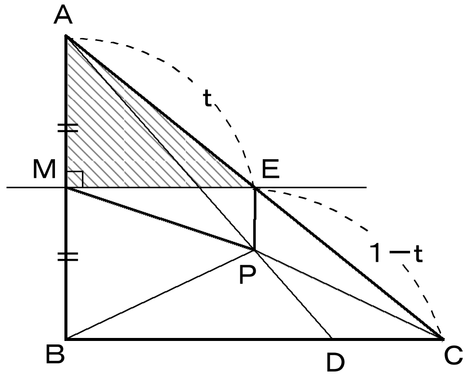
★

1（$|\overrightarrow{BC}|$ を k を用いた式で表す）

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}$　　◀ $\overrightarrow{BC}$ を点Pを基点とした位置ベクトルに書きかえる。

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|^2 \\
&= |\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+|\overrightarrow{PC}|^2 \\
&= 1^2-2\cdot\frac{k^2-5}{4}+1^2 \\
&= 2-\frac{k^2-5}{2}
\end{aligned}
$$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2-\dfrac{k^2-5}{2}}=\sqrt{\dfrac{9-k^2}{2}}$　…②



2（$|\overrightarrow{AB}|$ を k を用いた式で表す）

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}$　　◀ $\overrightarrow{AB}$ を点Pを基点とした位置ベクトルに書きかえる。

$=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$　　◀ 条件式より，$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$

$=-2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第３問 (5)】　ー〈４枚目／４枚〉

（前のページからのつづき）

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |-2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})|^2$$
$$= 4(|\overrightarrow{PB}|^2 + 2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} + |\overrightarrow{PC}|^2)$$
$$= 4\left(1^2 + 2\cdot\frac{k^2-5}{4} + 1^2\right)$$
$$= 4\left(2 + \frac{k^2-5}{2}\right)$$
$$= 8 + 2(k^2-5)$$
$$= 2k^2 - 2$$
$$= 2(k^2-1)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2(k^2-1)} \quad \cdots③$$

3（△ＡＭＥの面積を k で表す）

②，③より，$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{BC}|\times|\overrightarrow{AB}|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-k^2}{2}}\cdot\sqrt{2(k^2-1)}$$
$$= \frac{\sqrt{(9-k^2)(k^2-1)}}{2}$$

4（答をまとめる）

よって，$\triangle ABC = \dfrac{\sqrt{(9-k^2)(k^2-1)}}{2}$