山形大学入試問題・前期　　2024.10.28(月)

２０２０年度　数学

３

（１／１）■　数学Ｂ　ベクトル　■

【第３問】

平面上の△ＡＢＣとその内部の点Ｐが,

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}, \quad |\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=1$$

と満たすとする。また，$k=|\overrightarrow{PA}|$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　k^2を内積 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ を kを用いて表せ。

(3)　直線ＰＡと線分ＢＣの交点をＤとするとき，$\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PB}$ と$\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

★(4)　線分ＡＢの垂直二等分線と線分ＡＣの交点をＥとするとき，$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と$\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(5)　△ＡＢＣの面積を kを用いて表せ。

【　入試問題を解くための資料　】

【Ａ】（入試情報）

山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

【Ｂ】（出題情報）

(1)　第３問の出題項目：数学Ｂ　ベクトル　　◀2024年度からは「数学C」

(2)　第３問の出題内容：$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たす△ＡＢＣの内部の点Ｐ

＊今回は，第３問のうち(4)のみの解答です。　◀(1)(2)(3)(5)は別ファイルです。

【Ｃ】（対策情報）

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。
だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

(1)　第３問(4)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

数学Ｂ　「ベクトルと図形」　No.１（２／８）　◀内分点の位置ベクトル

数学Ｂ　「ベクトルとその演算」　No.２６（１／４）　◀ベクトルの垂直条件

(2)　「ベクトルと図形」の学習計画書

Link：→｜高校数学 ＭＥＮＵ｜：数学Ｃ【２】ベクトルと図形

「ベクトルとその演算」の学習計画書

Link：→｜高校数学 ＭＥＮＵ｜：数学Ｃ【１】ベクトルとその演算

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

（前のページからのつづき）

【　入試問題の解き方　】

【考え方】(4)　「$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。」と言われても，この形のままでは何をしていいのか分かりません。そこで，(3)の解法と同じ”手”を使ってみます。
(3)は，「線分ＢＣの内分点Ｄは，点Ｐを基点とした位置ベクトルで表せる」ことを教えています。

1　(4)では，条件で「線分ＡＣの交点をＥとせよ」と誘導しています。
これは，(3)の解法から類推すれば，「線分ＡＣの内分点Ｅは，点Ｐを基点とした位置ベクトルで表せる」と言っていることです。ここが，(4)の目標点となります。
そこで，
点ＥはＡＣをｔ：(１－ｔ)に内分する点であるとします。
つまり，ＡＥ：ＥＣ＝ｔ：(１－ｔ)とおき，点Ｐを基点とした位置ベクトル $\overrightarrow{PE}$ を，
ｔを使った内分点の位置ベクトルで表します。…①　◀をt未知数とした方程式のようなものです。

2　あらかじめ，$\overrightarrow{ME}$ と $\overrightarrow{AB}$ を，$\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて書きかえておき，

3　「線分ＡＢの垂直二等分線と線分ＡＣの交点をＥとする」とあることから，
”ベクトルで垂直は内積＝０を使う”という原則をそのまま使い，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ME}=0$ 利用することでｔの値を求めます。　◀方程式を解くプロセスに当たります。
ただし，$\overrightarrow{ME}$ と $\overrightarrow{AB}$ は，$\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ で書きかえてから内積＝０の式を作ります。
▲答は $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表さなければならないから。

4　ｔの値が求まったら，それを①の式に代入することで答えが求まります。

＊なお，$\overrightarrow{PA}$ がでてきたらすべて，条件式を使って $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ だけの式に書きかえていくことで，式を答として要求されている形に変形することができます。
$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　より，$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$ となります。

【山形大学入試出題原理】
山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

＊この第３問 (4) の問題では

(4)は，問題文を読んだだけでは，何をしていいのか分かりません。
しかし，手がかりがないと，問題は解けません…
実は，上の【考え方】で紹介したように，(3)が(4)の誘導問題になっているのです。
(4)の全体は”ｔについての方程式”のようなものですが，その”ｔについての方程式”を立てるときに(3)と同じ”手”を使います。
このような視点から【考え方】や［答　　案］を学習してみてください。”なるほど”と納得できるはずです。

（次のページへつづく）

（前のページからのつづき）

［答　　案］

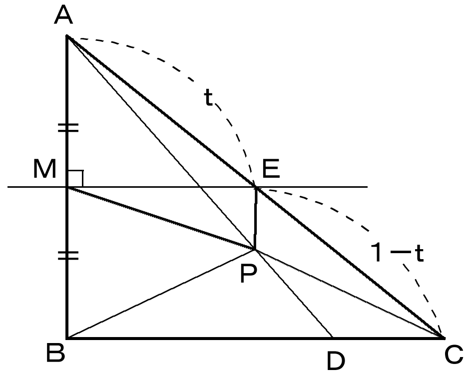
1 （点Ｅを点Ｐを基点とした位置ベクトルで表す）

ＡＥ：ＥＣ＝ t ：（１－ t ）とおくと，
点Ｅは線分ＡＣを t ：（１－ t ）に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{PE}=\frac{(1-t)\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PC}}{t+(1-t)}$$

$$=(1-t)\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PC}\quad\cdots①$$

◀2，3 で，この t の値を求める。
目的地は，$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表すことである。
$\overrightarrow{PA}$ は，条件式を使って，$\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ に書きかえることができる。



2 （$\overrightarrow{ME}$ と $\overrightarrow{AB}$ を，$\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表す）

線分ＡＢの中点をＭとすると，
点Ｍは線分ＡＢを１：１に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{PM}=\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{1+1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$$

よって，

$$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{PE}-\overrightarrow{PM}$$

◀$\overrightarrow{ME}$ を点Pを基点とする位置ベクトルに書きかえる。

$$=(1-t)\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PC}-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}\right)$$

◀$\overrightarrow{PE}$ は (1) より引用

$$=\overrightarrow{PA}-t\overrightarrow{PA}+t\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$$

◀かっこをはずす。

$$=\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{PA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+t\overrightarrow{PC}$$

◀同類項をまとめる。

ここで，$\overrightarrow{PA}$ を，$\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ で書きかえる。
条件より，$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$ であるから，

$$=\left(\frac{1}{2}-t\right)(-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC})-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+t\overrightarrow{PC}$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}+t\overrightarrow{PB}+2t\overrightarrow{PC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+t\overrightarrow{PC}$$

◀かっこをはずす。

$$=(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-1)\overrightarrow{PC}\quad\cdots②$$

◀同類項をまとめる。

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$$

◀$\overrightarrow{AB}$ を点Pを基点とする位置ベクトルに書きかえる。

ここで，$\overrightarrow{PA}$ を，$\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ で書きかえる。
条件より，$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$ であるから，

$$=\overrightarrow{PB}-(-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC})$$

$$=2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\quad\cdots③$$

（次のページへつづく）

↗（前のページからのつづき）

3（ｔの値を求める）　◀ベクトル垂直 → 内積＝０ を利用する。

ＡＢ⊥ＭＥより，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{ME}=0$であるから，

②と③より，

$$2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\{(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-1)\overrightarrow{PC}\}=0$$

両辺÷２

$$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})\cdot\{(t-1)\overrightarrow{PB}+(3t-1)\overrightarrow{PC}\}=0$$

$$(t-1)|\overrightarrow{PB}|^2+(3t-1)\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+(t-1)\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+(3t-1)|\overrightarrow{PC}|^2=0$$

$$(t-1)|\overrightarrow{PB}|^2+(4t-2)\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+(3t-1)|\overrightarrow{PC}|^2=0$$

ここで，条件より，$|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2=1$

(1) の結果を用いて，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\dfrac{k^2-5}{4}$ であるから，

$$(t-1)\cdot1^2+(4t-2)\cdot\frac{k^2-5}{4}+(3t-1)\cdot1^2=0$$

$$(4t-2)+(4t-2)\cdot\frac{k^2-5}{4}=0$$

$$(4t-2)\left(1+\frac{k^2-5}{4}\right)=0$$

$$(2t-1)\left(\frac{k^2-1}{4}\right)=0$$

$$(2t-1)(k^2-1)=0 \quad \cdots④$$

ここで，

(1) より，$\overrightarrow{PB}$と$\overrightarrow{PC}$のなす角をθとすると，

$k^2=4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+5$

$\quad =4\cdot1\cdot1\cdot\cos\theta+5$

$\quad =4\cos\theta+5$

また，

点Ｐは△ＡＢＣの内部にあるので，$0^\circ<\theta<180^\circ$

すなわち，$-1<\cos\theta<1$であるから，

$k^2>4\cdot(-1)+5=1$

◀ｋ^{2}を消去する。

$k^2\neq\pm1$であれば，④の両辺をk^2-1で割ってｋ^{2}を消去できる。

(1)より，k^2-1は$\cos\theta$の関数であり，$-1<\cos\theta<1$から，k^2の取りうる値の範囲が特定できる。

$k^2\neq\pm1$であるから，④の両辺をk^2-1で割って

$2t-1=0$より，$t=\dfrac{1}{2}$　…⑤

（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

4（答をまとめる）

⑤を①に代入して，

$$\overrightarrow{PE}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$$

$$=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$$

◀条件より，$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$$

したがって，

$$\underline{\overrightarrow{PE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}}$$