

山形大学入試問題・前期

2024. 10. 31 (木)

2020年度 数学  
(1/1) ■ 数学B ベクトル ■

## 【第3問】

平面上の△ABCとその内部の点Pが、

$$\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}, \quad |\vec{PB}| = |\vec{PC}| = 1$$

と満たすとする。また、 $k = |\vec{PA}|$ とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1)  $k^2$ を内積  $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$  を用いて表せ。
- (2) 内積  $\vec{PA} \cdot \vec{BC}$  を  $k$ を用いて表せ。
- (3) 直線PAと線分BCの交点をDとすると、 $\vec{PD}$ を  $\vec{PB}$ と  $\vec{PC}$  を用いて表せ。

★(4) 線分ABの垂直二等分線と線分ACの交点をEとすると、 $\vec{PE}$ を  $\vec{PB}$ と  $\vec{PC}$  を用いて表せ。

- (5) △ABCの面積を  $k$ を用いて表せ。

## 【入試問題を解くための資料】

## 【A】(入試情報)

山形大学の入試問題(2020年度・数学)は、第1問から第6問までであり、学部に応じて、次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第1, 2, 3問	(90分)
理学部	第1, 3, 4, 5問	(120分)
医学部	第1, 3, 5, 6問	(120分)
農学部	第1, 2, 3, 4問	(120分)

## 【B】(出題情報)

第3問の出題項目	数学B ベクトル	◀2024年度からは「数学C」
第3問の出題内容	$\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$ を満たす△ABCの内部の点P	

\*今回は、第3問のうち(4)のみの解答です。

◀(1)(2)(3)(5)は別ファイルです。

## 【C】(対策情報)

数専ゼミの高校数学教材は、山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから、この教材を学び切ることで、山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

- (1) 第3問(4)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル教材)

数学B 「[ベクトルと図形](#)」 No.1(2/8)

◀内分点の位置ベクトル

数学B 「[ベクトルとその演算](#)」 No.26(1/4)

◀ベクトルの垂直条件

- (2) 「ベクトルと図形」の学習計画書

Link: → | [高校数学 MENU](#) | : 数学C【2】ベクトルと図形

「ベクトルとその演算」の学習計画書

Link: → | [高校数学 MENU](#) | : 数学C【1】ベクトルとその演算

(次のページへつづく) ↗

## □ □ 【山形大学入試問題・前期 2020年度・第3問(4)】 - 〈2枚目/4枚〉

➡ (前のページからのつづき)

## 【 入試問題の解き方 】

【考え方】(4) 「 $\overrightarrow{PE}$  を  $\overrightarrow{PB}$  と  $\overrightarrow{PC}$  を用いて表せ。」と言われても、この形のままでは何をしていいのかわかりません。そこで、(3)の解法と同じ”手”を使ってみます。

(3)は、「線分BCの内分点Dは、点Pを基点とした位置ベクトルで表せる」ことを教えています。

- ① (4)では、条件で「線分ACの交点をEとせよ」と誘導しています。これは、(3)の解法から類推すれば、「線分ACの内分点Eは、点Pを基点とした位置ベクトルで表せる」と言っていることです。ここが、(4)の目標点となります。

そこで、

点EはACを  $t : (1 - t)$  に内分する点であるとします。

つまり、 $AE : EC = t : (1 - t)$  とおき、点Pを基点とした位置ベクトル  $\overrightarrow{PE}$  を、 $t$  を使った内分点の位置ベクトルで表します。…① ◀  $t$  を未知数とした方程式のようなものです。

- ② あらかじめ、 $\overrightarrow{ME}$  と  $\overrightarrow{AB}$  を、 $\overrightarrow{PB}$  と  $\overrightarrow{PC}$  を用いて書きかえておき、

- ③ 「線分ABの垂直二等分線と線分ACの交点をEとする」とあることから、”ベクトルで垂直は内積=0を使う”という原則をそのまま使い、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ME} = 0$  利用することで  $t$  の値を求めます。◀ 方程式を解くプロセスに当たります。

ただし、 $\overrightarrow{ME}$  と  $\overrightarrow{AB}$  は、 $\overrightarrow{PB}$  と  $\overrightarrow{PC}$  で書きかえてから内積=0の式を作ります。

▲ 答は  $\overrightarrow{PB}$  と  $\overrightarrow{PC}$  を用いて表さなければならないから。

- ④  $t$  の値が求まったら、それを①の式に代入することで答えが求まります。

\* なお、 $\overrightarrow{PA}$  がでてきたらすべて、条件式を使って  $\overrightarrow{PB}$  と  $\overrightarrow{PC}$  だけの式に書きかえていくことで、式を答として要求されている形に変形することができます。

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0} \text{ より、} \overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} \text{ となります。}$$

## 【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは、前の問の結果をうまく取り込むことで、次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれんかどうかで正解できるかどうかの分かれ目になります。

## \* この第3問(4)の問題では

(4)は、問題文を読んだだけでは、何をしたいのかわかりません。

しかし、手がかりがないと、問題は解けません…

実は、上の【考え方】で紹介したように、(3)が(4)の誘導問題になっているのです。

(4)の全体は”  $t$  についての方程式” のようなものですが、その”  $t$  についての方程式” を立てるときに(3)と同じ”手”を使います。

このような視点から【考え方】や[答 案]を学習してみてください。”なるほど”と納得できるはずですよ。

(次のページへつづく) ➡

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2020年度・第3問(4)】 - (3枚目/4枚)

➤ (前のページからのつづき)

[答 案]

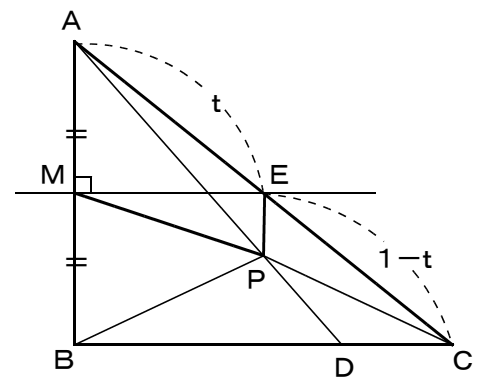
1 (点Eを点Pを基点とした位置ベクトルで表す)

点Eは線分ACの内分点であるから、 $AE : EC = t : (1-t)$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PE} &= \frac{(1-t)\overrightarrow{PA} + t\overrightarrow{PC}}{t+(1-t)} \\ &= (1-t)\overrightarrow{PA} + t\overrightarrow{PC} \\ &= (1-t)(-\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}) + t\overrightarrow{PC} \\ &\quad \triangle \text{条件式より, } \overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} \\ &= -\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} + t\overrightarrow{PB} + 2t\overrightarrow{PC} + t\overrightarrow{PC} \\ &= (t-1)\overrightarrow{PB} + (3t-2)\overrightarrow{PC} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

▲解法は  $t$  の値を求めることへ向かう。

◀目的地は、 $\overrightarrow{PE}$  を  $\overrightarrow{PB}$  と  $\overrightarrow{PC}$  を用いて表すこと



◀条件式より、 $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}$

2 ( $\overrightarrow{ME}$  と  $\overrightarrow{AB}$  を、 $\overrightarrow{PB}$  と  $\overrightarrow{PC}$  を用いて表す)

線分ABの中点をMとすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \\ &= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \\ &= -\overrightarrow{PC}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ME} &= \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PM} \\ &= (t-1)\overrightarrow{PB} + (3t-2)\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PC} \\ &= (t-1)\overrightarrow{PB} + (3t-1)\overrightarrow{PC} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

◀ $\overrightarrow{ME}$  を点Pを基点とする位置ベクトルに書きかえる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} \\ &= \overrightarrow{PB} - (-\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}) \\ &= 2(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

◀ $\overrightarrow{AB}$  を点Pを基点とする位置ベクトルに書きかえる。

◀条件式より、 $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}$

3 ( $t$  の値を求める)

◀ベクトル垂直 → 内積=0 を利用する。

$AB \perp ME$  より、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ME} = 0$  であるから、

②と③より、

$$2(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) \cdot \{(t-1)\overrightarrow{PB} + (3t-1)\overrightarrow{PC}\} = 0$$

両辺÷2

$$(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) \cdot \{(t-1)\overrightarrow{PB} + (3t-1)\overrightarrow{PC}\} = 0$$

$$(t-1)|\overrightarrow{PB}|^2 + (3t-1)\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + (t-1)\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + (3t-1)|\overrightarrow{PC}|^2 = 0$$

$$(t-1)|\overrightarrow{PB}|^2 + (4t-2)\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + (3t-1)|\overrightarrow{PC}|^2 = 0$$

(次のページへつづく) ➤

## □ □ 【山形大学入試問題・前期 2020年度・第3問(4)】 - 〈4枚目/4枚〉

➡ (前のページからのつづき)

$$\left| \begin{array}{l} \text{ここで, 条件より, } |\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2 = 1 \\ (1) \text{の結果を用いて, } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{k^2 - 5}{4} \text{であるから,} \end{array} \right.$$

$$(t-1) \cdot 1^2 + (4t-2) \cdot \frac{k^2-5}{4} + (3t-1) \cdot 1^2 = 0$$

$$(4t-2) + (4t-2) \cdot \frac{k^2-5}{4} = 0$$

$$(4t-2) \left( 1 + \frac{k^2-5}{4} \right) = 0$$

$$(2t-1) \left( \frac{k^2-1}{4} \right) = 0$$

$$(2t-1)(k^2-1) = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

ここで,

(1)より,  $\overrightarrow{PB}$  と  $\overrightarrow{PC}$  のなす角を  $\theta$  とすると,

$$\begin{aligned} k^2 &= 4 \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} + 5 \\ &= 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \theta + 5 \\ &= 4 \cos \theta + 5 \end{aligned}$$

また,

点Pは $\triangle ABC$ の内部にあるので,  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ すなわち,  $-1 < \cos \theta < 1$ であるから,

$$k^2 > 4 \cdot (-1) + 5 = 1$$

◀  $k^2$ を消去する。

$k^2 \neq \pm 1$ であれば, ④の両辺を  $k^2 - 1$ で割って  $k^2$ を消去できる。  
(1)より,  $k^2 - 1$ は $\cos \theta$ の関数であり,  $-1 < \cos \theta < 1$ から,  $k^2$ の取りうる値の範囲が特定できる。

 $k^2 \neq \pm 1$ であるから, ④の両辺を  $k^2 - 1$ で割って

$$2t - 1 = 0 \text{より, } t = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{5}$$

## 4 (答をまとめる)

⑤を①に代入して,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PE} &= \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \overrightarrow{PB} + \left( 3 \times \frac{1}{2} - 2 \right) \overrightarrow{PC} \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{PB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{PC} \end{aligned}$$

したがって,

$$\underline{\underline{\overrightarrow{PE} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{PB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{PC}}}}$$