

体験学習 on Web / 高校数学B_017

漸化式と数学的帰納法 No.8

 n の整式を含む漸化式(その3)

▶ 2024.10.25(金)

漸化式の第7テーマの「 n の整式を含む漸化式」のお勉強です。

恒例により、

漸化式を学ぶときにはいつでも、学習を始める前に、

そのタイプの漸化式の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは、こちら → Link | [Essay_954](#) | : 教材 | No.0_03 漸化式ナビ Ver3 |

「 n の整式を含む漸化式」の解法パターンの全体像

最初に、「 n の整式を含む漸化式」には、どんな形の式があり、どのような解法のパターンがあるかということを一覧表にしてまとめてみました。

プリントNo.

7 I型: $a_{n+1} = 5a_n + 8n + 10$ / (一般形) $a_{n+1} = p a_n + f(n)$

8 II型: $n a_{n+1} = 5(n+1) a_n$ / (一般形) $a_{n+1} = f(n) a_n$

$$a_{n+1} = \frac{4n}{3(n+1)} a_n$$

9 III型: $n a_{n+1} = (n+1) a_n + 1$ / (一般形) $a_{n+1} = f(n) a_n + q$

「 n の整式を含む漸化式」には、上のような3つの解法タイプがあります。

今回は、**8** II型の解き方を詳しくお勉強します。

「 n の整式を含む漸化式」の解法パターンII型

上の枠内の**8** II型の2つの具体的な漸化式をじっくりご覧下さい。

II型: $n a_{n+1} = 5(n+1) a_n$

$$a_{n+1} = \frac{4n}{3(n+1)} a_n$$

これまで勉強してきた7つのタイプの漸化式と決定的にちがうところがありますね。

わかりますか…

そうですね、 a_n に n の関数の係数がついていることです。

数多くある漸化式の中でも、このような特徴をもつ漸化式はこれだけです。

1つです。

その意味で、非常に分かりやすい漸化式といえます。

漸化式の基本形に変形する

そこで、このタイプの漸化式の解き方ですが…

《漸化式ナビ_Ver3》を見て、すべての漸化式の形を見つめてみて下さい。

漸化式というのは $n+1$ 関係の式は左辺に、 n 関係の式は右辺にある のに気づきましたか。

この漸化式の”定め”にしたがえば、

a_n に n の関数の係数がついているタイプ の漸化式も当然、

$n+1$ 関係の式は左辺に、 n 関係の式は右辺にまとめる

ことから始めなければなりません。

この「 $n+1$ 関係の式は左辺に、 n 関係の式は右辺にまとめる」方法には、いくつかの”手”がありますので、これはこれで覚えなければなりません。

いくつかを紹介しましょう。

① No.8 (1/4) ★解法の技術★(1) の場合

$n a_{n+1} = 5(n+1) a_n$ の両辺を $n(n+1)$ で割ると、

$$\frac{n a_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{5(n+1) a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = 5 \cdot \frac{a_n}{n}$$

② No.8 (1/4) ★解法の技術★(2) の場合

$a_{n+1} = \frac{4n}{3(n+1)} a_n$ の両辺に $(n+1)$ をかけると、

$$(n+1) a_{n+1} = \frac{4}{3} n a_n$$

③ No.8 (4/4) ★演習★【2】(1) の場合

$n a_{n+1} = 2(n+2) a_n$ の両辺を $n(n+2)$ で割ると、

$$\frac{n a_{n+1}}{n(n+2)} = \frac{2(n+2) a_n}{n(n+2)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} = 2 \cdot \frac{a_n}{n}$$

左辺に $n+2$ などというわけのわからない式が残りました。これでは解けません。

そこで、両辺を分母の平均値で割ります。これがこのタイプの **スーパーテクニック** です。

両辺を $\frac{(n+2)+n}{2} = n+1$ で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = 2 \cdot \frac{a_n}{n(n+1)}$$

これで、等比型漸化式になり、先へ進めます。

④ No.8 (4/4) ★演習★【2】(2) の場合

$a_{n+1} = \frac{2n+3}{2n-1} a_n$ の両辺を $2n+3$ で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{2n+3} = \frac{2n+3}{(2n-1)(2n+3)} a_n$$

左辺に $2n+3$ などというわけのわからない式が残りました。これでは解けません。そこで、両辺を分母の平均値で割ります。③と同じの**スーパーテクニック**です。

両辺を $\frac{(2n+3)+(2n-1)}{2} = 2n+1$ で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{a_n}{(2n-1)(2n+1)}$$

「これで、等比型漸化式になり、先へ進め」**ない!**

そもそも、等比型漸化式などになっていない。

え?

なっていないですか。

でも、ここで等比型漸化式になってもらわないと、計算は先へ進めません。

そこで、強引になっていただきます。

$$\frac{a_{n+1}}{\{2(n+1)-1\}\{2(n+1)+1\}} = \frac{a_n}{(2n-1)(2n+1)}$$

等比型漸化式になったので、先へ進めます。

これも**スーパーテクニック**といえます。

スーパーテクニックは難問を解くときのツールになりますので、どんなときに、どんなテクニックを使ったらいいのかを整理して覚えておきましょう。

以上が「 n の整式を含む漸化式」のうちの⑧ II型の解き方の全容です。

個々の型の解き方はもちろんですが、**型の全体を俯瞰できる力**もつけておきましょう。

エピソード

今回は、「 n の整式を含む漸化式」のうちの⑧ III型の解き方を学習します。

このタイプの漸化式は、階差型漸化式になるし、上で紹介したスーパーテクニックも使う派手な解き方が必要になる問題です。

数学の好きな人には”垂涎”の問題ですし、数学の嫌いな人には”避けて通りたい”問題です。ま、とにかく、やります。

◀●■ 学習教材 ■●▶

高校数学B・数列 3・漸化式と数学的帰納法 No.8

1 漸化式 (その6)

■ n の整式を含む漸化式 II ■

学習教材 → Link: | [高校数学B・教材サンプル MENU](#) |

／[数学B \[3\] 漸化式と数学的帰納法 記録](#) プリントNo.8

★演習★は、数専ゼミ・東原教室で指導しています。いつからでも入塾できます。

漸化式に強くなる数専ゼミの数列指導

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp

基礎とテスト対策は数専ゼミで！

- 在籍学年に関係なく、算数・数学のどの分野でも学習できます。
いつからでも、どこからでも、始められます。
- 他塾に在籍していても、**数専ゼミで「算数・数学」**だけ指導を受けることもできます。

* コマーシャル 数専ゼミ・山形東原教室 → Link: | [入学案内書](#) |