体験学習 on Web／高校数学B_016

漸化式と数学的帰納法　No.７　｜　ｎの整式を含む漸化式（その２）

▶ 2024.10.24(木)

漸化式の第７テーマの「ｎの整式を含む漸化式」のお勉強です。
恒例により，
漸化式を学ぶときにはいつでも，学習を始める前に，
そのタイプの漸化式の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは，こちら　→ Link｜Essay_954｜：教材｜No.０_０３漸化式ナビ Ver3｜

「nの整式を含む漸化式」の解法パターンの全体像

最初に，「ｎの整式を含む漸化式」には，どんな形の式があり，どのような解法のパターンがあるかということを一覧表にしてまとめてみました。

プリントNo.

7	Ⅰ型：$a_{n+1}=5a_n+8n+10$	／（一般形）　$a_{n+1}=pa_n+f(n)$
8	Ⅱ型：$na_{n+1}=5(n+1)a_n$ $a_{n+1}=\dfrac{4n}{3(n+1)}a_n$	／（一般形）　$a_{n+1}=f(n)a_n$
9	Ⅲ型：$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$	／（一般形）　$a_{n+1}=f(n)a_n\ +q$

「ｎの整式を含む漸化式」には，上のような３つの解法タイプがあります。
今回は，7　Ⅰ型の解き方を詳しくお勉強します。

まず，Ⅰ型の特徴です。

（一般形）　$a_{n+1}=pa_n+f(n)$

・a_nに係数がついていること。

・定数項がｎの関数であること。

この２点です。

生徒Ａ子：「a_nに係数がついていないと，どうなるの？」
おう！賢い！
いい質問です。
《漸化式ナビ_Ver3》を見てください。

$a_{n+1}=a_n+f(n)$

というのがありますね。

生徒Ａ子：「階差型漸化式だ！」
そうです。$a_{n+1}-a_n=f(n)$ ですから，「階差型漸化式」になります。
だから，これと混乱しないことが，まず大切な１点です。

次に，Ｉ型の変種をいくつかあげてみます。
変種によって，解き方の工夫が必要になるので，注意して下さい。
Ｉ型の基本形　$a_{n+1}=5a_n+8n+10$
Ｉ型の変種①　$a_{n+1}=5a_n+8n$
問題の漸化式の定数部分がないタイプです。
②　$a_{n+1}=2a_n+n^2-n+1$
$f(n)$の部分が３項式であるタイプです。

以上がＩ型の概要です。
Ｉ型の全体のしくみは，こんなふうにできている，ということだけ理解しておいて下さい。
”それがどしたの？”ということは，解き方を説明すると，”なるほど，そういうふうに理解していると混乱しないんだな”ということがわかります。

Ｉ型の基本形の解法

では，Ｉ型の基本形 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ の解き方の説明に入ります。
漸化式 $a_{n+1}=5a_n+8n+10$ …①　の一般項を求めてみます。

赤ラインより，$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型だから，
①を $a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=5(a_n+\alpha n+\beta)$ （仮の等比型漸化式）とおき，
これを展開して整理して係数を比較して α，β についての連立方程式を立てて，これを解き，
①に代入する。
これで①は，$a_{n+1}+2(n+1)+3=5(a_n+2n+3)$ となり，
これは数列 $\{a_n+2n+3\}$ の等比型漸化式だから，これを解けば数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まる。

以上のことを一言で言えば，$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ を見たら，
「仮の等比型漸化式を設定し，与式との係数比較によって α と β を定める。」
となります。
これが「ｎの整式を含む漸化式」の一般的な解法です。
「仮の等比型漸化式を設定する」ということがこの型の特徴的なテクニックです。
なぜ，そのように設定していいのか，については教材№７（１／７）と（２／７）に詳しく説明してありますので，”なるほど”と納得しておいて下さい。
理由を説明できる必要はありません。

解法のプロセス全体を”しこしこ”と練習して覚えるのではなく，
このように，解法の特徴を一言で概括して覚えることが解法のテクニックを覚えるコツです。

Ⅰ型の変種①②の解法

Ⅰ型ですから，「仮の等比型漸化式を設定する」という解法は同じです。
違いは，この仮の等比型漸化式の設定のしかたです。
基本形と変種の設定のしかたを比較してみます。

Ⅰ型の基本形　$a_{n+1}=5a_n+8n+10$
仮の等比型漸化式：$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=5(a_n+\alpha n+\beta)$とおく。

Ⅰ型の変種①　$a_{n+1}=5a_n+8n$
問題の漸化式の定数部分がないタイプです。
仮の等比型漸化式：$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=5(a_n+\alpha n+\beta)$とおく。
定数部分がないからといって，βの部分を省略してはいけない，というタイプです。結果としては，基本形と同じですが，ないのにつける工夫が必要です。

②　$a_{n+1}=2a_n+n^2-n+1$
$f(n)$の部分が３項式であるタイプです。
$f(n)$の部分が３項式だから，置き換える漸化式には，α，β，γを使います。
だから，置き換える漸化式の右辺は，$2(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma)$となります。

エピローグ

以上で「ｎの整式を含む漸化式Ⅰ型」の解法のすべてです。
生徒Ａ子：「$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ は，仮の等比型漸化式を設定する，でいいんだね！」
はい，”本質”をよくおさえましたね。
それが”応用力”の正体です。
応用力が身についた，ということですよ。
生徒Ａ子：「うむ…」

◀●■　学習教材　■●▶

高校数学Ｂ・数列　３・漸化式と数学的帰納法　No.７
１　漸化式（その６）
■　ｎの整式を含む漸化式Ⅰ　■

学習教材 → Link：｜高校数学Ｂ・教材サンプル ＭＥＮＵ｜
／数学Ｂ［３］漸化式と数学的帰納法 記録　プリントNo.７

漸化式に強くなる数専ゼミの数列指導

数専ゼミ・山形東原教室

〒990－0034　山形市東原町二丁目10番8号

TEL:(023)633－1086　／　FAX.(023)633－1094

メールアドレス：　suusen@seagreen.ocn.ne.jp

基礎とテスト対策は数専ゼミで！

■在籍学年に関係なく，算数・数学のどの分野でも学習できます。
　いつからでも，どこからでも，始められます。

■他塾に在籍していても，数専ゼミで「算数・数学」だけ指導を受けることもできます。