

山形大学入試問題・前期

2024. 10. 28(月)

2020年度 数学
(1/1) ■ 数学B ベクトル ■

【第3問】

平面上の $\triangle ABC$ とその内部の点 P が、

$$\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}, \quad |\vec{PB}| = |\vec{PC}| = 1$$

と満たすとする。また、 $k = |\vec{PA}|$ とする。このとき、次の問に答えよ。(1) k^2 を内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ を用いて表せ。(2) 内積 $\vec{PA} \cdot \vec{BC}$ を k を用いて表せ。★(3) 直線 PA と線分 BC の交点を D とするとき、 \vec{PD} を \vec{PB} と \vec{PC} を用いて表せ。(4) 線分 AB の垂直二等分線と線分 AC の交点を E とするとき、 \vec{PE} を \vec{PB} と \vec{PC} を用いて表せ。(5) $\triangle ABC$ の面積を k を用いて表せ。

【入試問題を解くための資料】

【A】(入試情報)

山形大学の入試問題(2020年度・数学)は、第1問から第6問まであり、学部に応じて、次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第1, 2, 3問	(90分)
理学部	第1, 3, 4, 5問	(120分)
医学部	第1, 3, 5, 6問	(120分)
農学部	第1, 2, 3, 4問	(120分)

【B】(出題情報)

第3問の出題項目	数学B ベクトル	◀2024年度からは「数学C」
第3問の出題内容	$\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$ を満たす $\triangle ABC$ の内部の点 P	

*今回は、第3問のうち(3)のみの解答です。

◀(1)(2)(4)(5)は別ファイルです。

【C】(対策情報)

数専ゼミの高校数学教材は、山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから、この教材を学び切ることで、山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

(1) 第3問(3)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル教材)

数学B 「[ベクトルと図形](#)」 No.1(5/8)

◀位置ベクトルが表す点の位置

(2) 「ベクトルと図形」の学習計画書

Link: → | [高校数学 MENU](#) | : 数学C【2】ベクトルと図形

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2020年度・第3問(3)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

【入試問題の解き方】

【考え方】(3)は、「内分点の位置ベクトル」を求める問題です。

与えられた条件「直線PAと線分BCの交点をDとするとき」を位置ベクトルで表しこれを使って、結論の「PDをPBとPCを用いて表せ」へ導くことが、解法の全体の流れです。

条件式 $\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$ を、点Aを基点とする位置ベクトルに書きかえ、 \vec{PA} について解くと、この式から、点Pと点Dの位置が読み取れます。

読み取ったデータを用いることで、PDをPBとPCを用いて表すことができます。

* この(3)の問題の全体の解法の流れは、【C】(1)「ベクトルと図形」No.1(5/8)を学習すると、とてもよく理解できます。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは、前の問の結果をうまく取り込むことで、次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれんかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

* この第3問(3)の問題では

(3)は「内分点の位置ベクトル」を求める問題ですから、(1)、(2)の中には(3)の問題を解くために使える情報はありません。(3)は、(4)に対する誘導問題になっています。

[答 案]

① (\vec{AP} を \vec{AB} と \vec{AC} を用いて表す)

条件 $\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$ を点Aを基点とする位置ベクトルに書きかえると、

$$-\vec{AP} + (\vec{AB} - \vec{AP}) + 2(\vec{AC} - \vec{AP}) = \vec{0}$$

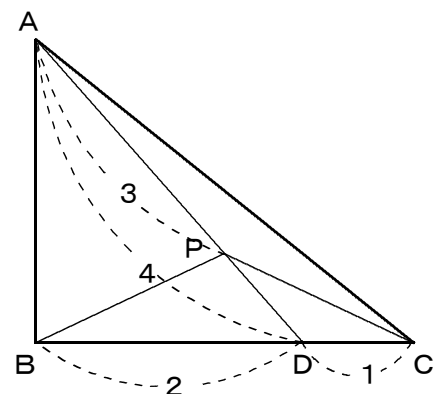
これを \vec{AP} について解いて、

$$-4\vec{AP} + \vec{AB} + 2\vec{AC} = \vec{0}$$

$$-4\vec{AP} = -\vec{AB} - 2\vec{AC}$$

$$\vec{AP} = \frac{\vec{AB} + 2\vec{AC}}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\vec{AB} + 2\vec{AC}}{2+1} \quad \dots \textcircled{1}$$

▲ \vec{AD}



② (\vec{PD} を \vec{PB} と \vec{PC} を用いて表す)

①より、

点Pは直線PAと線分BCの交点Dに対して線分ADを3 : 1に内分する点であり

点Dは線分BCを2 : 1に内分する点である

ことがわかる。したがって、

$$\vec{PD} = \frac{\vec{PB} + 2\vec{PC}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{PB} + \frac{2}{3}\vec{PC}$$

◀ \vec{PD} は辺BCの内分点の位置ベクトル