山形大学入試問題・前期　2024.10.23(水)

３

２０２０年度　数学

（１／１）■　数学Ｂ　ベクトル　■

【第３問】

平面上の△ＡＢＣとその内部の点Ｐが，

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}, \quad |\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=1$$

と満たすとする。また，$k=|\overrightarrow{PA}|$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　k^2を内積 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ を k を用いて表せ。

★(3)　直線ＰＡと線分ＢＣの交点をＤとするとき，$\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(4)　線分ＡＢの垂直二等分線と線分ＡＣの交点をＥとするとき，$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(5)　△ＡＢＣの面積を k を用いて表せ。

【　入試問題を解くための資料　】

【Ａ】（入試情報）

山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，
学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

【Ｂ】（出題情報）

(1)　第３問の出題項目：**数学Ｂ　ベクトル**　◀2024年度からは「数学C」

(2)　第３問の出題内容：$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たす△ＡＢＣの内部の点Ｐ

＊今回は，第３問のうち(3)のみの解答です。　◀(1)(2)(4)(5)は別ファイルです。

【Ｃ】（対策情報）

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。
だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

(1)　第３問(3)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

数学Ｂ　「ベクトルと図形」　No.１（５／８）　◀位置ベクトルが表す点の位置

(2)　「ベクトルと図形」の学習計画書

Link：→｜高校数学 ＭＥＮＵ｜：数学Ｃ【２】ベクトルと図形

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

【　入試問題の解き方　】

【考え方】(3)　「内分点の位置ベクトル」を求める問題です。
△ＡＢＣの辺ＢＣ上の点Ｄの内分点を求め，それを△ＰＢＣの辺ＢＣ上の点Ｄの内分点として利用して $\overrightarrow{PD}$ の位置ベクトルを求める，というのが全体の解法の流れでです。

「直線ＰＡと線分ＢＣの交点をＤとするとき」という条件から，点Ｄは線分ＢＣの内分点であることがわかります。
そこで，条件式 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を使って，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表します。
（条件式を，点Ａを基点とする位置ベクトルに書きかえる。）
これより，ＢＤ：ＤＣが求まり，点Ｄが線分ＢＣの内分点であることから，
$\overrightarrow{PD}$ は $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ 　を用いて表すことができます。
（$\overrightarrow{PD}$ は辺ＢＣの内分点の位置ベクトルです。）

＊この(3)の問題の全体の解法の流れは，【Ｃ】(1)「ベクトルと図形」№１（５／８）を俯瞰すると，非常によく理解できます。

【山形大学入試出題原理】
山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

＊この第３問(3)の問題では
(3)は「内分点の位置ベクトル」を求める問題ですから，(1)，(2)の中には(3)の問題を解くために使える情報はありません。他の問題とは独立した問題のようです。
では，(3)は(4)に対する誘導問題になっているのかどうか。
(3)と(4)の問題文の構造を比較してみます。

(3)　$\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ 　を用いて表せ。　→ $\overrightarrow{PD}$ は線分ＢＣの内分点Ｄの位置ベクトル

(4)　$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ 　を用いて表せ。　→ $\overrightarrow{PE}$ は線分ＢＣの内分点Ｅの位置ベクトル

文の構造から推論すると，上の(4)のようになるのが自然です。
ところが，このように考えを進めていくと「袋小路」に入ります。先に進めません。
実は，(3)の結果は，そっちではなく，別の方向へ進めといっているのです。
つまり，点Ｅを線分ＡＣの内分点と考え，$\overrightarrow{PE}$ を点Ｐを基点とする点Ｅの位置ベクトルとしなさいと誘導しているのです。ここから切り込んでいかないと，(4)は解けません。
(4)は，問題文を読んだだけでは何をしていいかわかりません。しかし，$\overrightarrow{PE}$ を点Ｐを基点とする点Ｅの位置ベクトルと考えることによって，ＡＢ⊥ＭＥ（Ｍは線分ＡＢの中点）から，内積＝０の利用へと論を進めていくという道が開けます。
なお，これについては(4)で詳しく説明しますが，「(3)では内分点を基点をＡから点Ｐに移動して考えましたね，(4)では $\overrightarrow{PE}$ をＢＣの内分点の位置ベクトルではなく，ＡＣの内分点Ｅの位置ベクトルと考えましょうね」と誘導しているのです。詳細は(4)で学習します。

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第３問(3)】　ー〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

［答　　案］

条件 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を，点Ａを基点とする位置ベクトルに書きかえると，

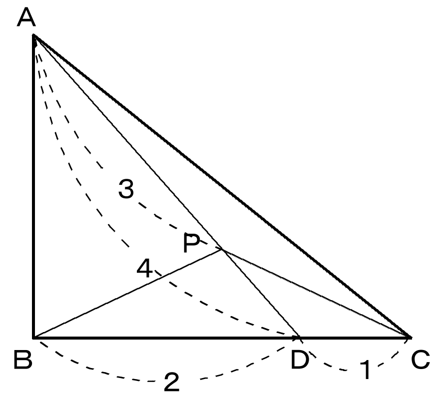
$$-\overrightarrow{AP}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

$$-4\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$-4\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2+1}$$

▲ $\overrightarrow{AD}$ の位置ベクトル



よって，

点Ｐは直線ＰＡと線分ＢＣの交点Ｄに対して線分ＡＤを３：１に内分する点であり，

点Ｄは線分ＢＣを２：１に内分する点である

ことがわかる。したがって，

$$\overrightarrow{PD}=\frac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{2+1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$$

◀ $\overrightarrow{PD}$ は辺ＢＣの内分点の位置ベクトル

したがって，

$$\overrightarrow{PD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$$