

体験学習 on Web / 高校数学B_014

漸化式と数学的帰納法 No.6

分数型漸化式(その3)

▶ 2024.10.22(火)

「分数型漸化式」の3回目のお勉強です。
 漸化式を学ぶときにはいつでも、学習を始める前に、
 そのタイプの漸化式の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは、こちら → Link | [Essay_954](#) | :教材 | No.0_03 漸化式ナビ Ver3 |

「分数型漸化式」の解法パターンの全体像

最初に、「分数型漸化式」の全体像を確認しておきます。

I 型 : $a_{n+1} = \frac{a_n}{4-6a_n}$ / (一般形) $a_{n+1} = \frac{pa_n}{qa_n+r}$
 (操作手順) **両辺の逆数をとる** → 特性方程式型漸化式 → 等比型漸化式になる場合
 → 等差型漸化式になる場合

II 型① : $a_{n+1} = \frac{a_n-1}{a_n+3}$ (誘導条件) $b_n = \frac{1}{a_n+1}$ / (一般形) $a_{n+1} = \frac{pa_n+s}{qa_n+r}$
 (操作手順) **誘導条件を使って、与式を b_n だけで表し、 $\{b_n\}$ の一般項を求め、
 b_n を戻して数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。**
 → **等差型** 漸化式になる (誘導条件の分子が定数の場合)

II 型② : $a_{n+1} = \frac{5a_n+3}{a_n+3}$ (誘導条件) $b_n = \frac{a_n-3}{a_n+1}$ / (一般形) $a_{n+1} = \frac{pa_n+s}{qa_n+r}$
 (操作手順) 誘導条件を使って、与式を b_n だけで表し、 $\{b_n\}$ の一般項を求め、
 b_n を戻して数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。
 → **等比型** 漸化式になる (誘導条件の分子に a_n を含む場合)

「分数型漸化式」には、I 型と II 型の2種類があること、
 I 型は、両辺の逆数を取り、特性方程式型か等差型へ導いて一般項を求める、
 というのが第2回目までの学習でした。

「分数型漸化式 II 型」の解法のプロセス

したがって、今回は、II 型の学習になります。

Ⅱ型では、Ⅰ型のように両辺の逆数をとっても、事態は先へ進みません。
逆数をとっても、その後、何をしたらいいかわからないのですね。

だから、Ⅱ型の問題には条件式がつきます。これがないと、Ⅱ型の漸化式は解けません。
逆に、分母と分子に a_n を含む分数式で、条件式（多くは $b_n = a_n$ の式）があったらⅡ型の分数型漸化式だ、と判別できます。

Ⅱ型の「分数型漸化式」にも2つのタイプがありますが、タイプを意識しなくとも、計算を進めていけば自動的に等差型か等比型漸化式になります。
それぞれに応じて処理すれば一般項はもとまります。

Ⅱ型の「分数型漸化式」の解き方は2つのタイプに共通ですので、これを説明します。

- ・条件式は $b_n = a_n$ の式という形で与えられます。これを使って $b_{n+1} = a_{n+1}$ の式を作ります。
 - ・この2つの式を $a_n = b_n$ の式、 $a_{n+1} = b_{n+1}$ の式の形に変形します。
 - ・この2つの式を、問題の式に代入して a を消去し、 b だけの式にします。
 - ・この式を $b_{n+1} = b_n$ の式に変形すると、数列 $\{b_n\}$ の一般項が求まります。
- { 条件式の分子が定数の場合は、等差型漸化式になり、
 条件式の分子に a_n を含む場合は、等比型漸化式になります。
- ・最後に、 b_n を戻せば、数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まります。

条件式の分子に a_n を含む場合の計算

教材No.6（4／7）では、条件式の分子が定数の場合の答案が紹介してあります。

分子が定数なので、 $b_{n+1} = b_n$ の式に変形する計算はそう難しくはなりません。

ところが、条件式の分子に a_n を含む場合は、このプロセスは想像を絶する難しさになります。

スーパーテクニックを使わないと計算できません。

50年間数学を教えてきましたが、この計算を自力でやりきた生徒はひとりもいません。

条件式の分子が定数の場合の計算とは、ある意味でまったく逆の考え方をしなければならぬので計算方法がおもい浮かばないのですね。

しかし、ヒントをもらえば、だれにも簡単に計算できます。

エピローグ

生徒A子：「あのねえ…

事態は、なんか、“すごい”ことになっていない？」

そうですね，“すごい”ことになっています。

★演習★【2】と【3】などは、A4判ノート3ページにわたって答案をかかねばなりません。

しかし，“しこしこ”やるしかないでしょうね。

「分数型漸化式」はこれでおしまいです。

次回からは、「 n の整式を含む漸化式」というのを勉強します。

これは n が漸化式のどこにあるかによって3つのタイプに分かれます。

この辺まで来ると、いろいろな漸化式が登場するもんだから、そろそろ”混乱”する生徒がでます。必ず…

で、しよ、A子さん！

生徒A子：「ふん！」

漸化式の型と式の形をしっかりと結びつけて頭の中に整理してしまっておきましょう。

その際には、毎回授業の最初に見ている《漸化式ナビ》が役に立ちます。

ただし、これに、具体的な数値の式を対応させて整理しておかないと使えません。

”具体的一般で覚える”というのが、複雑な問題を覚えるときの鉄則です。

◀●■ 学習教材 ■●▶

高校数学B・数列 3・漸化式と数学的帰納法 No.6

1 漸化式（その5）

■ 分数を含む漸化式 ■

学習教材 → Link : | [高校数学B・教材サンプル MENU](#) |

／数学B [3] 漸化式と数学的帰納法 記録 プリントNo.6

★演習★は、数専ゼミ・東原教室で指導しています。いつからでも入塾できます。

漸化式に強くなる数専ゼミの数列指導

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp

基礎とテスト対策は数専ゼミで！

■在籍学年に関係なく、算数・数学のどの分野でも学習できます。

いつからでも、どこからでも、始められます。

■他塾に在籍していても、**数専ゼミで「算数・数学」**だけ指導を受けることもできます。

*コマーシャル 数専ゼミ・山形東原教室 → Link : | [入学案内書](#) |