	３

山形大学入試問題・前期　　2024.10.29(火)

２０２０年度　数学

（１／１）■　数学Ｂ　ベクトル　■

【第３問】

平面上の△ＡＢＣとその内部の点Ｐが，

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0},\quad |\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=1$$

と満たすとする。また，$k=|\overrightarrow{PA}|$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　k^2 を内積 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

★(2)　内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ を k を用いて表せ。

(3)　直線ＰＡと線分ＢＣの交点をＤとするとき，$\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(4)　線分ＡＢの垂直二等分線と線分ＡＣの交点をＥとするとき，$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(5)　△ＡＢＣの面積を k を用いて表せ。

【　入試問題を解くための資料　】

【Ａ】（入試情報）

山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，
学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

【Ｂ】（出題情報）

第３問の出題項目	数学Ｂ　ベクトル　　◀2024年度からは「数学Ｃ」
第３問の出題内容	$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たす△ＡＢＣの内部の点Ｐ

＊今回は，第３問のうち(2)のみの解答です。　　◀(1)(3)(4)(5)は別ファイルです。

【Ｃ】（対策情報）

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。
だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

(1)　第３問(2)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

数学Ｂ　「ベクトルと図形」　No.４（１／５），（２／５）　◀位置ベクトルの問題の解き方の基本

(2)　「ベクトルと図形」の学習計画書

Link：→｜高校数学 ＭＥＮＵ｜：数学Ｃ【２】ベクトルと図形

（次のページへつづく）↗

□ □　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第３問 (2)】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

【　入試問題の解き方　】

【考え方】(2)　山大入試だから，「(2)では，(1)の結果を使う」が”原則的な”解き方です。

(1)の結果は，$k^2 = 4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} + 5$ であり，これは，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} = \dfrac{k^2-5}{4}$ と書きかえることができます。

そこで，与式の $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{BC}$ をそれぞれ $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ で書きかえることができれば内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ を k を用いて表すことができそうです。。

$\overrightarrow{PA}$ は，条件式 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ を変形すれば $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ で表せます。

$\overrightarrow{BC}$ は点Ｐを基点とした位置ベクトルに書きかえることができます。

かっこをはずすことで，内積 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ が現れます。また，$|\overrightarrow{PB}|^2$ や $|\overrightarrow{PC}|^2$ は条件より１であることがわかりますから。$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ は，内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ は k を用いて表すことができます。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

＊ この第３問 (2) の問題では

問題は「k を用いて表せ。」と言っているので，「(1)の結果を使え。」と教えてくれています。

［答　　案］

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$

ここで，　◀(1)の結果が使えるように，与式をすべて $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ で表す。

条件 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ より，$\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$　◀点Ｐを基点とした位置ベクトルで表す，(後－前)

であるから，

$= (-\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC})\cdot(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB})$

$= -\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} + |\overrightarrow{PB}|^2 - 2|\overrightarrow{PC}|^2 + 2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$

$= |\overrightarrow{PB}|^2 - 2|\overrightarrow{PC}|^2 + \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$

$= 1^2 - 2\cdot 1^2 + \dfrac{k^2-5}{4}$　◀ $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = 1$ より，$|\overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PC}|^2 = 1$

$= -1 + \dfrac{k^2-5}{4}$

$= \dfrac{k^2-9}{4}$