



山形大学入試問題・前期

2024. 10. 28(月)

2020年度 数学
(1/1) ■ 数学B ベクトル ■

【第3問】

平面上の△ABCとその内部の点Pが、

$$\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}, \quad |\vec{PB}| = |\vec{PC}| = 1$$

を満たすとする。また、 $k = |\vec{PA}|$ とする。このとき、次の問に答えよ。

- ★(1) k^2 を内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ を用いて表せ。
- (2) 内積 $\vec{PA} \cdot \vec{BC}$ を k を用いて表せ。
- (3) 直線PAと線分BCの交点をDとすると、 \vec{PD} を \vec{PB} と \vec{PC} を用いて表せ。
- (4) 線分ABの垂直二等分線と線分ACの交点をEとすると、 \vec{PE} を \vec{PB} と \vec{PC} を用いて表せ。
- (5) △ABCの面積を k を用いて表せ。

【入試問題を解くための資料】

【A】(入試情報)

山形大学の入試問題(2020年度・数学)は、第1問から第6問まであり、学部に応じて、次のように解答することが求められています。

人文社会科学部	第1, 2, 3問	(90分)
理学部	第1, 3, 4, 5問	(120分)
医学部	第1, 3, 5, 6問	(120分)
農学部	第1, 2, 3, 4問	(120分)

【B】(出題情報)

第3問の出題項目	数学B ベクトル	◀2024年度からは「数学C」
第3問の出題内容	$\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$ を満たす△ABCの内部の点P	

*今回は、第3問のうち(1)のみの解答です。◀(2)(3)(4)(5)は別ファイルです。

【C】(対策情報)

数専ゼミの高校数学教材は、山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから、この教材を学び切ることで、山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

- (1) 第3問(1)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル教材)

数学B 「ベクトルとその演算」	No.23(3/5)	◀”平方公式”の証明
	No.25s(1/3)	◀”平方公式”と内積の利用

- (2) 「ベクトルとその演算」の学習計画書

Link: → | [高校数学 MENU](#) | : 数学C【1】ベクトルとその演算

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2020年度・第3問(1)】 - 〈2枚目/2枚〉

➤ (前のページからのつづき)

【 入試問題の解き方 】

【考え方】(1) 条件 $k = |\vec{PA}|$ の両辺を2乗して、 $k^2 = |\vec{PA}|^2$ …①

条件 $\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$ より、 $\vec{PA} = -\vec{PB} - 2\vec{PC}$ …②

②を①に代入して、式を展開することで、 k^2 を内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ を用いて表すことができます。(詳細は、[答案]をご覧ください。)

ここでは、乗法公式を使って2乗をはずします。

一般に、 $(a + b)^2 = a^2 + 2 \underline{a \cdot b} + b^2$ の乗法公式より、 a, b がベクトルのとき、 a^2 と b^2 の部分が絶対値の2乗、 $2 \underline{a \cdot b}$ の部分が内積にあたります。

ここでは、公式をどのように使うかではなく、与えられた条件を使って求める形をどのように導き出すかという”思考”が問われています。

【第3問】全体がこのような”思考”を使って解く問題となっています。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは、前の問の結果をうまく取り込むことで、次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれんかどうかで正解できるかどうかの分かれ目になります。

* この第3問(1)の問題では

(2) 以降の設定をさっと見ても、内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ の値を k^2 で表したものを使うのだろうなと予想できます。だから、(1) が解けないと、第3問は0点です。逆に、(2) 以降の問題で行き詰まったら、内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ を作り出すことを考えると”道は開けます”。

[答 案]

$$\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0} \text{ より,}$$

$$\vec{PA} = -\vec{PB} - 2\vec{PC}$$

であるから,

$$k^2 = |\vec{PA}|^2$$

$$= |-\vec{PB} - 2\vec{PC}|^2$$

$$= |\vec{PB}|^2 + 4\vec{PB} \cdot \vec{PC} + 4|\vec{PC}|^2$$

ここで,

条件 $|\vec{PB}| = |\vec{PC}| = 1$ より,

$|\vec{PB}|^2 = |\vec{PC}|^2 = 1$ であるから,

$$= 1^2 + 4\vec{PB} \cdot \vec{PC} + 4 \cdot 1^2$$

$$= \underline{4\vec{PB} \cdot \vec{PC} + 5}$$

《図的状況》

