3

山形大学入試問題・前期　2024.10.20(日)

２０２０年度　数学

（１／１）■　数学Ｂ　ベクトル　■

【第３問】

平面上の△ＡＢＣとその内部の点Ｐが，

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}\,,\quad |\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=1$$

を満たすとする。また，$k=|\overrightarrow{PA}|$ とする。このとき，次の問に答えよ。

★(1)　k^2を内積 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BC}$ を k を用いて表せ。

(3)　直線ＰＡと線分ＢＣの交点をＤとするとき，$\overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(4)　線分ＡＢの垂直二等分線と線分ＡＣの交点をＥとするとき，$\overrightarrow{PE}$ を $\overrightarrow{PB}$ と $\overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

(5)　△ＡＢＣの面積を k を用いて表せ。

【　入試問題を解くための資料　】

【Ａ】（入試情報）

山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，
学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

【Ｂ】（出題情報）

(1)　第３問の出題項目：**数学Ｂ　ベクトル**　◀2024年度からは「数学C」

(2)　第３問の出題内容：$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たす△ＡＢＣの内部の点Ｐ

＊今回は，第３問のうち(1)のみの解答です。　◀(2)(3)(4)(5)は別ファイルです。

【Ｃ】（対策情報）

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。
だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

(1)　第３問(1)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

数学Ｂ　「ベクトルとその演算」　No.２３（３／５）　◀”平方公式”の証明

No.２５ｓ（１／３）　◀”平方公式”と内積の利用

(2)　「ベクトルとその演算」の学習計画書

Link：→｜高校数学 ＭＥＮＵ｜：数学Ｃ【１】ベクトルとその演算

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第３問 (1)】　－〈２枚目／２枚〉

（前のページからのつづき）

【　入試問題の解き方　】

【考え方】(1)　一般に，$(a+b)^2=a^2+2\underline{ab}+b^2$ の乗法公式より，a，bがベクトルのとき，a^2とb^2 の部分が絶対値の２乗，$2\underline{ab}$の部分が内積にあたります。
これは，内積に関する問題を解くときによく使う”手”です。
この問題でいえば，$(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})^2=|\overrightarrow{PB}|^2+2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+|\overrightarrow{PC}|^2$。
これと，与えられた条件（$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ と $k=|\overrightarrow{PA}|$ と $|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|=1$）を組み合わせると，$k^2$は，内積$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ を使って表すことができます。
公式をどのように使うかではなく，与えられた条件を使って求める形をどのように導き出すかという技術が問われています。（いわゆる“思考力”です。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

＊ この第３問 (1) の問題では

(2) 以降の設問をさっと見ても，内積$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ の値を k^2で表したものを使うのだろうなと予想できます。だから，(1) が解けないと，第３問は０点です。逆に，(2) 以降の問題で行き詰まったら，内積$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ を作り出すことを考えると”道は開けます”。

［答　　案］

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より，

$$\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
k^2&=|\overrightarrow{PA}|^2\\
&=|-\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PC}|^2\\
&=|\overrightarrow{PB}|^2+4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+4|\overrightarrow{PC}|^2\\
&=1^2+4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+4\cdot1^2\\
&=\underline{4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+5}
\end{aligned}$$

《図的状況》