

## 体験学習 on Web / 高校数学B\_011

漸化式と数学的帰納法 No.5

n乗を含む漸化式(その3)

▶ 2024.10.18(金)

漸化式を学ぶときにはいつでも、学習を始める前に、  
そのタイプの漸化式の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは、こちら → Link | [Essay\\_954](#) | :教材 | [No.0\\_03 漸化式ナビ Ver3](#) |

## 「n乗型漸化式」の2つの解法

問題が与えられたら、これは”n乗型”と言えるようになりましたか。

「n乗型漸化式」の一般形は、 $a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n$  です。  
この型には、次の2つのタイプがあります。

I	n乗型 → 特性方程式型 → 等比型 → 一般項	$p \neq r$ のとき
II	n乗型 → 等差型 → 一般項	$p = r$ のとき

今回は、「n乗型漸化式」第Iタイプの解法を学習しました。

I n乗型 → 特性方程式型 → 等比型 → 一般項 ( $p \neq r$  のとき)

これが、Iタイプの問題を解くヒューリスティクスでしたね。

したがって、きょうは

「n乗型漸化式」の第IIタイプの学習ということになります。

II n乗型 → 等差型 → 一般項 ( $p = r$  のとき)

これが、IIタイプの問題を解くヒューリスティクスです。

「n乗型漸化式」の第IIタイプも、第Iタイプ同様に、次の2つのステップで解きます。

II n乗型 → 等差型 → 一般項 ( $p = r$  のとき)  
第1ステップ 第2ステップ

## 「n乗型漸化式」の解法(第IIタイプ)

第1ステップは、

所与の漸化式が「n乗型漸化式」だ、と判別できたら迷わず、

$$a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n$$

の両辺を  $r^{n+1}$  で割ります。

【注】 $r^{n-1}$  のときでも、 $r^{n+1}$  のときでも、 $r^{n+1}$ で割ります。

理由は、漸化式（ $n+1$ と $n$ の項）を作る必要があるからです。

「第Ⅰタイプなのかな、第Ⅱタイプなのかな」などと考える必要はありません。

とにかく、「 $n$ 乗型漸化式」は両辺を $r^{n+1}$ で割ります。

割ってみると、第Ⅰタイプなのか、第Ⅱタイプなのかが自然と現れてきます。

両辺を $r^{n+1}$ で割ると、 $p=r$ のときは、 $a_{n+1}=a_n+d$  という形の式になります。

だれが、どのようにやってもこうなります。

ほれ、「**等差型漸化式**」になりましたがね。

生徒A子：「あいや～っ、

数学ってすっごいねえ！」

はい、数学は、理路整然と、行く道は決まっているのです。

”やるべきこと”をやると、答えが自動的にでてくる”しかけ”になっているのです。

生徒A子：「ま、そうなんだけど…

その”やるべきこと”がわからんのですがねえ…。」

はい、だから、その”やるべきこと”をお勉強しているのです。

## 第2ステップは、

「**等差型漸化式**」の解法プロセスそのものです。

新しいことはなにもありません。No.2で学習したのとまったく同じ解き方をします。

ただ、全体の流れは同じなのですが、ここでは、No.2とは異なった解法の技術を使います。

”**おきかえ**”という技術です。

複雑な式を1文字で置きかえて、全体の解法の流れを見やすくするテクニックですが、

そのために「 $n$ 乗型漸化式」では、特有のあらたな難しい解法の技術が必要になる場合があります。

第Ⅱタイプ（ $p=r$ のとき）では、

$a_{n+1}=p a_n+q \cdot r^n$  の両辺を $r^{n+1}$ で割ると、

$a_{n+1}=a_n+d$  という形の式になりますが、

このとき、 $a$ は分数式になります。

この分数式を1文字で置きかえるのですが、最後には戻さなければなりません。

このときには、両辺に分母の累乗数をかけるわけですが、指数の計算をする必要がでてきます。

ここが困難をきわめます。かなり高度な指数計算をしなければなりません。

問題によっては、何をしたいかわからないまま、複雑な形で解きっぱなしにして答案を提出する生徒も出ます。

出るのではなく、ほとんどの生徒がそのようにします。

「これって、どうも答えっぽくないなあ…？」と書いた本人も不思議な”ころもち”で…

たとえば、 $a_n=\frac{10}{3} \cdot 4^{n-1} \cdot 2^n-\frac{5}{6} \cdot 2^n$

などという答えを出してきます。

実は、この式では、いたるところに**2の因数**を含んでいますから、

（ $10=2 \times 5$ ， $4=2 \times 2$ ， $6=2 \times 3$ など）

この2は指数法則を使ってまとめなければならないのです。

## 「 $n$ 乗型漸化式」の”ネック” – 指数法則 –

あるいは、 $n$ 乗型漸化式の”ネック”はこの指数計算であるといってもいいかもしれません。第1ステップの計算は、慣れればだれでもできるようになりますが、この指数計算は“慣れる”わけではなく、指数法則の深い理解が必要となります。

上の式は、指数法則を使ってまとめると、次のようになります。

$$a_n = \frac{5}{3} \cdot 2^{3n-1} \cdot 2^n - \frac{5}{3} \cdot 2^{n-1}$$

このまとめるプロセスは理解できますか。

生徒A子：「(@\_@)?」

でしょう？

この問題を解けるようになるには、高いレベルまで指数法則の復習をしておく必要があります。この場合の指数法則が漸化式の”基礎”となります。

基礎は”基本”ではありません。

基礎はかなり難しい場合もあります。

基礎は、軽く考えないようにしましょう。

## エピローグ

「 $n$ 乗型漸化式」のお勉強は、これでおしまいです。

全体としては、特徴的な解法プロセスをとるので、他の漸化式の解き方と混乱することはありません。

ただ、「 $n$ 乗型漸化式」の解法プロセスに特有の難しさがありますので、それをクリアすることがこの漸化式を征服するコツになります。

- ・まず、両辺を  $r^{n+1}$  で割って、特性方程式型漸化式か等差型漸化式へもちこむときの計算です。これは、パターンは1通りしかないので、いくつかの問題をこなしていくうちにできるようになります。
- ・困難なのは、上で紹介したように、置きかえを戻すときの指数の計算です。これは計算パターンなどなく、”漸化式”の問題をいっぱい解いたからといって解けるようになるという保証はありません。やはり「数学Ⅱの指数法則」に戻り、ハイレベルな問題をこなしていくしか”手”はありません。

## ◀●■ 学習教材 ■●▶

高校数学B・数列 3・漸化式と数学的帰納法 No.5

1 漸化式（その4）

■ n乗を含む漸化式 ■

学習教材 → Link : | [高校数学B・教材サンプル MENU](#) |

／数学B [3] 漸化式と数学的帰納法 記録 プリントNo.5

★演習★は、数専ゼミ・東原教室で指導しています。いつからでも入塾できます。

## 漸化式に強くなる数専ゼミの数列指導

### 数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: [suusen@seagreen.ocn.ne.jp](mailto:suusen@seagreen.ocn.ne.jp)

## 基礎とテスト対策は数専ゼミで！

- 在籍学年に関係なく、算数・数学のどの分野でも学習できます。  
いつからでも、どこからでも、始められます。
- 他塾に在籍していても、**数専ゼミで「算数・数学」**だけ指導を受けることもできます。

\* コマーシャル 数専ゼミ・山形東原教室 → Link : | [入学案内書](#) |