

体験学習 on Web / 高校数学B_008

漸化式と数学的帰納法 No. 4

階差タイプ(その4)

▶ 2024. 10. 15 (火)

今回は、階差タイプの漸化式のお勉強です。

まず、「階差タイプの漸化式」の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは、こちら → Link | [Essay_954](#) | : 教材 | No. 0_03 漸化式ナビ Ver3 |

” 具体的一般 ” で思考プロセスを覚えましょう！

第3回で、階差タイプの漸化式的具体例で、第5項を求める思考プロセスを紹介しました。

これは、第5項を求める具体的一般の思考プロセスです。

だから、5をnに置きかえると、そのまま一般項を求める思考プロセスになるはずですよ。

やってみます。

第n項の値(一般項)を求める

次のような問題として与えられます。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 2n - 1$$

で定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。

まず、与えられた条件を満たす数列は、どんなものかを調べます。《具体的状況》です。

n	: 1	2	3	4	5	...	n	
$\{a_n\}$: 3	4	7	12	19	...	<input style="width: 40px; height: 15px;" type="text"/>	◀ここを求める問題です。
$\{b_n\}$: 1	3	5	7	$2n - 1$	

3, 4, 7, 12, 19, ...の数列は、等差でも等比でもないから、項の差の数列を調べます。

数列 $\{b_n\}$ です。これが等差数列になっていますから、これならなんとかかなりそうです。

そこで、これを利用して、数列 $\{a_n\}$ の第n項(一般項)の値(式)を求めてみます。

数列 $\{a_n\}$ の初項は3です。

数列 $\{a_n\}$ の初項に、初項から第n項までの項間の差の和を加えます。

$3 + (1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1)$ ▲これが数列 $\{b_n\}$ の初項から $n - 1$ 項までの和です。

となります。

数列 $\{b_n\}$ の和の部分を、 Σ を使って表現すると、

$$3 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 1)$$

となります。

これを計算すれば、数列 $\{a_n\}$ の第 n 項(一般項)の値が求まります。

この計算は、次のようになります。

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

◀数列の一般項を求める”一般”式です。

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k - 1)$$

◀これ以降は、単なる Σ の計算です。

$$= 3 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 3 + 2 \times \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot \{(n-1)+1\} - (n-1)$$

$$= 3 + n(n-1) - (n-1)$$

$$= n^2 - 2n + 4$$

$n = 1$ のとき、

$$a_1 = 1^2 - 2 \times 1 + 4 = 3$$

となり、 $n = 1$ のときも成り立つ。

よって、 $a_n = n^2 - 2n + 4$

いかがですか。

第3回で第5項を求める計算式の5の部分で、ワープロ上で n に上書きしただけです。

第5項を求める計算が”一般”であったことが”証明”されました。

確かめてみる

生徒A子：「でも、さあ…

” $n^2 - 2n + 4$ ” って、ほんとに、与えられた条件を満たす数列の一般項なの？」

疑い深い人ですねえ。

では、確かめてみますよ。

$n^2 - 2n + 4$ において、

$$n = 1 \text{ のとき, } 1^2 - 2 \times 1 + 4 = 3$$

$$n = 2 \text{ のとき, } 2^2 - 2 \times 2 + 4 = 4$$

$$n = 3 \text{ のとき, } 3^2 - 2 \times 3 + 4 = 7$$

$$n = 4 \text{ のとき, } 4^2 - 2 \times 4 + 4 = 12$$

$$n = 5 \text{ のとき, } 5^2 - 2 \times 5 + 4 = 19$$

つまり

$$\{a_n\} : \boxed{3}, 4, 7, 12, 19, \dots, n^2 - 2n + 4, \dots$$

のように、最初の数列になっています。

生徒A子：「わっ，わっ，わっ，…
すっごい！すっごい！すっごい！
ふ～っ…」
そんなに驚くことではない，と思うのですが…

なぜ、 $n \geq 2$ なの？

生徒A子：「ところで，ねえ…
ずっと，不思議に思っていたんだけど…
なんで， $n \geq 2$ という条件をつけたり， $n = 1$ を別枠で説明するの？」

はい，はい。

とても，とてもいい質問です。

多くの方は，”そんなもんだ”と思って計算していますが，
ここを疑問に思うことは，求め方の理由を深く知ろうというこれまでの流れをよ～く理解してお
られています。

上にあげた具体的な数列を見れば，だれにも，考えずにわかることですが，
階差数列はもとの数列の第2項目から数えています。初項はすでに与えられており，階差数列の
和としては数えません。すなわち， $n \geq 2$ から階差数列を扱います。

これを，式の上から見てみます。

$n \geq 2$ という条件をつけない場合を考えます。

階差数列の和の部分ですが， $n = 1$ のときは， $\sum_{k=1}^{1-1} (2k-1)$ といくことになります。

$n = 1$ から始めると， k が1のときから0までの和，というありえないことが生じます。

だから， n は2から始めなければなりません。

だから， $n = 1$ のときも，一般項がいえるのかどうかを，最後に確認しておく必要があるのです
ね。

生徒A子：「アイ，シー！
センセの説明って，よ～くわかるよ。
将来，絶対に，偉くなる
といいですね，センセ！」

…

どこかで聞いたようなフレーズですねえ。

発想が，ワンパターンとか…

生徒A子：「でも，さあ…
なんか，長～いお話だったけど…
実際の問題では，どのように答案を書くの？」

はい，いい質問です。

これについては，プリントNo.4（2／7）にていねいに説明してありますので，

そちらを、ぜひご覧下さい。

階差タイプの解法の思考プロセスの”構造”（しくみ）を覚えることも大切な学習です。

”構造”とは、扱う操作内容とその順序のことです。

エピローグ

階差タイプの漸化式の一般項の求め方は、理解できましたか。

”やり方”だけを丸暗記しても、応用することはできません。

解法プロセスの1つ1つの式の”意味”（何を求めているのか）を理解していることが大切です。

こんなことは、どの参考書にも書いてありませんが…

これで、階差タイプの漸化式のお勉強はおしまいです。

次回からは、漸化式の”森”に入ります。

ようするに、なんだかわけのわからない、得体のしれない”化け物”がいっぱい出てくるということですよ。

《漸化式ナビ_Ver3》を見ると“怪物”の正体の全体像がわかります。

最初は、No.5「 n 乗を含む漸化式」というのをやります。

◀●■ 学習教材 ■●▶

高校数学B・数列 3・漸化式と数学的帰納法 No.4

1 漸化式（その3）

■ 階差タイプ ■

学習教材 → Link: | [高校数学B・教材サンプル MENU](#) |

／[数学B \[3\] 漸化式と数学的帰納法 記録](#) [プリントNo.4](#)

★演習★は、数専ゼミ・東原教室で指導しています。いつからでも入塾できます。

漸化式に強くなる数専ゼミの数列指導

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp