

体験学習 on Web / 高校数学B_005

漸化式と数学的帰納法 No. 4

階差タイプ(その1)

▶ 2024.10.12(土)

今回は、階差タイプの漸化式のお勉強です。

まず、「階差タイプの漸化式」の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは、こちら → Link | [Essay_954](#) | :教材 | No.0_03 漸化式ナビ Ver3 |

「階差タイプの漸化式」の式の形

最初に、「階差タイプの漸化式」の式の形の特徴をしっかりと覚えて下さい。

特性方程式タイプとの比較から入ります。

階差タイプ単独の形を丸暗記するのではなく、特性方程式タイプとどこが違うのか、という視点で階差タイプの式の形の特徴を覚えます。

特性方程式タイプ $a_{n+1} = p a_n + q$ (ただし、 p, q は0でない定数で $p \neq 1$)

階差タイプ $a_{n+1} = a_n + f(n)$

階差タイプでは、 a_n には係数がありません。階差を作るから係数など当然ないわけです。

特性方程式タイプの定数 q が n の関数に代わっています。

なぜ n の関数になるのかは、追って説明しますが、ここでは、そうなっているという現象だけを覚えて下さい。

$a_{n+1} - a_n = f(n)$ の形に変形すると、なるほど、 $f(n)$ は階差数列の第 n 項を表しておくと納得できます。

生徒A子: 「う〜っ! ???」

わかりませんか?

生徒A子: 「ところでねえ…

階差数列ってなんだっけ?」

あ、そうですね。

この段階で、階差数列そのものがよくわかっていない人もおられるのですね。

そんなのお見通しです。

プリントの1ページ目は、「階差数列とは何か」の復習です。

階差数列の使い方

「階差数列の一般項の求め方」なんてのはないわけです。

階差数列といえども、それだけを取り出せば、単なる数列ですから。

階差数列はあくまで本体の数列の一般項を求める際の“黒子”です。

本体の数列の一般項を求めるのを影で”お手伝い”しているだけなのです。

具体例で説明しましょう。

一般的具體です。

このメカニズムをもとに,”一般”を通すことなく,他の具体的な問題へ転用がききます。

3・漸化式と数学的帰納法 **ナビ**

学習資料

《階差数列》を利用した数列の一般項の求め方

$$\begin{array}{cccccc}
 n & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
 \{a_n\} & : & \boxed{3}, & 4, & 7, & 12, & 19, & \dots \\
 \{b_n\} & : & \underline{1}, & \underline{3}, & \underline{5}, & \underline{7}, & \dots & , 2n-1
 \end{array}$$

$19 = \boxed{3} + (1+3+5+7)$
 $\sum_{k=1}^{5-1} b_k$

$$\begin{aligned}
 a_5 &= a_1 + \sum_{k=1}^{5-1} b_k \\
 &= 3 + \sum_{k=1}^{5-1} (2k-1) \\
 &= 3 + 2 \sum_{k=1}^4 k - \sum_{k=1}^4 1 \\
 &= 3 + 2 \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4+1) - 4 \\
 &= 3 + 20 - 4 \\
 &= 19
 \end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ の数の並びを見ます。3, 4, 7, 12, 19, ...

等差でもない,等比でもない。

だから,一般項は求められません。

こんなとき,各項間の差をとって,その数の並びを考えます。

1, 3, 5, 7, ...

公差数列になりました。この数列なら一般項は求められます。

初項1,公差2の等差数列ですから,一般項は $a_n = 1 + (n-1) \times 2$ より, $2n-1$ です。

問題はここからです。

階差数列の一般項が $2n-1$ だとわかったのはいいが,これが本体の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める際にどのように”お手伝いしている”のか,という問題です。

$$\begin{array}{cccccc}
 n & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
 \{a_n\} & : & \boxed{3}, & 4, & 7, & 12, & 19, & \dots \\
 \{b_n\} & : & \underline{1}, & \underline{3}, & \underline{5}, & \underline{7}, & \dots & , 2n-1
 \end{array}$$

$19 = \boxed{3} + (1+3+5+7)$
 $\sum_{k=1}^{5-1} b_k$

この具体的シェーマがすべてを言い尽くしております。

第5項の値を求める

たとえば、数列 $\{a_n\}$ の第5項の値を求めてみます。

数列 $\{a_n\}$ の初項は3です。

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $(5 - 1)$ 項までの項間の差の和を加えます。

$$\boxed{3} + (1 + 3 + 5 + 7) = 19$$

となります。

和の部分を、階差数列の一般項を使って表現すると、

$$\boxed{3} + \sum_{k=1}^{5-1} (2k - 1)$$

となります。

これを計算すれば、数列 $\{a_n\}$ の第5項の値が求まります。

この計算は、次のようになります。

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + \sum_{k=1}^{5-1} b_k \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{5-1} (2k - 1) \\ &= 3 + 2 \sum_{k=1}^4 k - \sum_{k=1}^4 1 \\ &= 3 + 2 \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4 + 1) - 4 \\ &= 3 + 20 - 4 \\ &= 19 \end{aligned}$$

第n項の値 = 一般項を求める

以上の思考プロセスのすべてのシチュエーションにおいて、5をnに置きかえれば、数列 $\{a_n\}$ の第n項の値、すなわち一般項を求めることができます。

第n項を第5項とか第6項など具体的な項の1つと考える【考え方】です。

これが”一般的具体”を使った問題の解き方です。

全体の考え方の流れが、ものすごくわかり易いというのが最大の特徴です。

「階差数列ねえ…？」

と迷ったら、この第5項を求めるプロセスに戻って解法の流れを確かめればいいのです。

階差タイプの漸化式は…？

以上の”下こしらえ”が終えていれば、

階差タイプの漸化式を理解するのは”屁でも”ありません。

生徒A子：「あのねえ…

ちと、例えば，“ご下品”じゃございません？」

うむ…

ようするに、ブタにもわかる，ということです。

ソクラブタ：「そりゃ，

ぶたに失礼でしょうが…！」

うむ！

ようするに“簡単”ということです。

生徒A子：「最初から，そういえば

メモリの無駄遣いせずにすんだのにい…」

”メモリの無駄遣い”ですか。

なつかしいことばですねえ！

今の人はなんのことがわからんでしょうが…。

ま，そんなことはどうでもいいのです。

それで，次回に，“ぶたにもわかる”階差タイプの漸化式のお勉強をします。

ソクラブタ：「あの～

さっきの”抗議”は受け付けてもらえなかったようですが…」

え！？

なんのこと？

教材だけは，お見せしておきましょう。

◀●■ 学習教材 ■●▶

高校数学B・数列 3・漸化式と数学的帰納法 No. 4

1 漸化式（その3）

■ 階差タイプ ■

学習教材 → Link：| [高校数学B・教材サンプル MENU](#) |

／[数学B \[3\] 漸化式と数学的帰納法 記録](#) [プリントNo. 4](#)

★演習★は，数専ゼミ・東原教室で指導しています。いつからでも入塾できます。

漸化式に強くなる数専ゼミの数列指導

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp

基礎とテスト対策は数専ゼミで！

- 在籍学年に関係なく、算数・数学のどの分野でも学習できます。
いつからでも、どこからでも、始められます。
- 他塾に在籍していても、**数専ゼミ**で「**算数・数学**」だけ指導を受けることもできます。

* コマーシャル 数専ゼミ・山形東原教室 → Link : | [入学案内書](#) |