数学Essay_957　　数専ゼミ・山形東原教室

体験学習 on Web／高校数学B_004

漸化式と数学的帰納法　№.３　｜　特性方程式タイプ（その２）

▶ 2024.10.11(金)

特性方程式タイプの漸化式のお勉強です。
まず，「特性方程式タイプの漸化式」の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは，こちら　→ Link｜Essay_954｜：教材｜№.０_０３漸化式ナビ Ver3｜

「特性方程式タイプの漸化式」の式の形

最初に，「特性方程式タイプの漸化式」の式の形の特徴をしっかりと覚えて下さい。

$a_{n+1}=pa_n+q$　（ただし，ｐ，ｑは０でない定数でｐ≠１）

生徒Ａ子：「あれ？
　このイントロは，前回と同じですねぇ！」
そうです。
学習の目標をしっかりとおさえていただくためです。
つまり，何を勉強するのかもわからないで，問題だけ解いている人って
あんがい多いのです。
その問題を解くことで，どんな知識・技術を身につけるのかをしっかりと押さえて下さい。

きょうは，特性方程式タイプの漸化式からその数列の一般項を求める方法の学習です。
つまり，$a_{n+1}=pa_n+q$　の式から，a_n＝～の式を導くプロセスを覚えます。

特性方程式型は等比型を経由して一般項を求める

本質的なことは，特性方程式タイプは等比タイプへ変形できれば，その数列の一般項は求めることができる，ということです。
なぜならば，等比タイプの漸化式を見れば，その数列の初項と公比がわかるからです。

”本質”がわかれば，思考の向かう方向は一直線です。
では，いきます。
まず，具体例でいきますが，これは”具体的一般”という形です。
具体的な問題ですが，すべての場合に適用できる法則的なプロセスです。
わかりやすく，応用範囲の広い考え方です。
応用力の”本質”です。

生徒Ａ子：「”本質”ねぇ…
　ところで，”本質”って何ですねん？」

本質とは”対象領域のすべての現象に通底する一般原理”のことです。
生徒Ａ子：「う～っ！
　　　　　もっと，わからんがね！」
ま，それを守れば答えが間違いなくでてくる原則みたいなもんです。
要するに，”大切”とか”重要”とかの意味です。
生徒Ａ子：「おう，アイ，シー！
　　　　　それならわかる。」
アイ，スィー！
生徒Ａ子：「ふん！」

わかっていただけたところで，では…
$a_1=10$，　$a_{n+1}=5a_n-12$　という特性方程式タイプの漸化式で決定される数列の一般項を求めるプロセスを考えます。

特性方程式型が等比型へ変形できる理由

$a_{n+1}-3=5(a_n-3)$　…①
これは等比型ですから，この形から一般項は求まります。
この式を展開して整理してみます。

$a_{n+1}-3=5a_n-15$

$a_{n+1}=5a_n-15+3$

$a_{n+1}=5a_n-12$　　…②

①と②は同じものです。
だから，もし②の式が与えられたら，これは一般に，

$a_{n+1}-\alpha=5(a_n-\alpha)$　　…③

の形に変形できるはずです。（この問題の場合は$\alpha=3$になっていますが。）

特性方程式型を等比型へ変形する方法

ここで，②の式の形を③の式の形に変形するプロセスを考えます。
要するに，αの値が求まればいいわけです。（これが本質ですよ！）
②－③を計算すればa_{n+1}とa_nが消去できて，αについての方程式ができます。
やってみます。

②－③より，

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} & =5a_n-12 \\ -) & a_{n+1}-\alpha & =5(a_n-\alpha) \\ \hline & \alpha & =-12+5\alpha \end{array}$$

◀これが特性方程式です。

$\alpha=3$

③で，$\alpha=3$のとき，

$a_{n+1}-3=5(a_n-3)$　…④

等比型漸化式になりました。

等比型漸化式から一般項を読み取る

この形が手に入れば，一般項を求めることができるようになります。

④より，数列 $\{a_n-3\}$ は，
初項　$a_1-3=10-3=7$，公比　5
の等比数列であるから，
$a_n-3=7\cdot 5^{n-1}$
-3 を移項して，
$a_n=7\cdot 5^{n-1}+3$

◀このプロセスは，等比型漸化式から数列の一般項を求めるプロセスです。

実際の答案のフォームはプリントNo.３（３／７）をご覧下さい。
もちろん，ずっと簡単なフォームです。

なっが～い説明にも慣れておきましょうね

生徒Ａ子：「なっが～い説明ですねぇ…」
そうですよ。
共通テストは，数学でも，長い説明を読み取らなければ解けないのです。
まるで国語の長文問題を読みとるみたいに…
慣れておきましょうね。
生徒Ａ子：「ふ～ん！」

◀●■　学習教材　■●▶

高校数学Ｂ・数列　３・漸化式と数学的帰納法　No.３
１　漸化式（その２）
■　特性方程式タイプ　■

学習教材 → Link：|高校数学Ｂ・教材サンプル ＭＥＮＵ|
／数学Ｂ［３］漸化式と数学的帰納法 記録　プリントNo.３