

数学の問題が解けるようになる学習法(4)

▶ 2024. 9. 27 (金)

これまでのお話の”まとめ”

「数学の問題が解けるようになる学習法」の第4回目(最終回)です。

これまでの3回の学習で、
学習の目的となる「問題の解法」は、解法のパターン別に解法プロセスをデジタル化して覚え
ました。(* 学習の目的とは、例えば、「2重根号のはずしかた」とか、「2次関数の最大値・最
小値の求め方」などのことです。)
そして、同じパターン、解法プロセスをもつチェック問題を解きながら、目的となる「問題の解
法」が使えることを確認しました。

参考書で勉強している人の99%が、ここで学習の目的となる「問題の解法」の学習を終えてし
まいます。参考書にはその先、つまり学んだことのレベルを上げ、応用範囲を広げるための問題
が載っていないから当然のことですが…。

「応用力」をつける

学校の定期テスト程度ですと、ここまでの学習をしておけば、ほぼ100%は正解できると思え
ます。ところが、校外模試などでは、これくらいのレベルと範囲では歯が立ちません。

では、この上、何をしなければならないかという…

これまで学んだことを応用する練習をしなければなりません。

では、その応用する練習って何ですか。

どんな教材を使って、どのように学習するのですか。

これを具体的に説明した参考書はありません。

ないから、だれもできません。

できないから、この上のレベルの力を身につけたい人は塾で指導を受けます。

この人達が模試の上位を占めます。

ごく、ごく、あたりまえのことです。

塾では、どのようにしてレベルを上げ、応用範囲を広げる指導をするのかを具体例を用いて紹介
しましょう。

第2回目で学習した、「2重根号のはずし方」のレベルアップと応用範囲の拡張をしてみます。

「2重根号のはずし方」のレベルアップ

—「応用力」を学ぶ—

No. 2 3 2重根号を2回はずす

次の式を簡単にしなさい。

$$(1) \sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$$

$$(2) \sqrt{10+3\sqrt{97+56\sqrt{3}}}$$

* 応用する点

- ① 内側の2重根号をはずし, ② 整理して, ③ 更に2重根号をはずします。

▲この部分が応用

- (2) では, 積と和が大きな数となっています。

「かけて*, たして~」の2数の見つけ方が難しくなっています。

いままでの学習に新しいことが加わったのではなく, 既習の解法プロセスはそのまま使えます。

No. 2 4 2重根号の有理化

次の2重根号をはずして簡単にしなさい。

$$(1) \frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{\sqrt{19-8\sqrt{3}}}$$

$$(2) \sqrt{7+2\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}$$

$$(3) \sqrt{\frac{\sqrt{6+1}}{\sqrt{6-1}} + \frac{\sqrt{6+3}}{\sqrt{6+1}}}$$

* 応用する点

解法プロセスに「有理化」という新しい条件が加わります。

- (1) ① 分母や分子の2重根号をはずしてから, ② 分母を有理化します。

▲この部分が応用

- (2) ① 2重根号をはずしておきます。

- ② 最初は, それぞれ, 別個に計算し, 後で1本の式にまとめます。◀新しいところ
長い複雑な式は, 部分に分けて計算します。

(これは微積などの長い計算をするときにその威力を体感できます。)

- (3) 根号の中を通分することで, 単に2重根号をはずす基本問題になります。

みかでだおしの問題です。式が複雑であってもあせらないことが大切です。

No. 2 5 式の値(1) 有理化→代入

$$x = \sqrt{12+2\sqrt{35}}, \quad y = \sqrt{12-2\sqrt{35}} \text{ のとき, } \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \text{ の値を求めなさい。}$$

* 応用する点

これまでのように, 単に「2重根号をはずす」だけではなく, その後で, 「式の値を求める」という他の分野との融合問題になります。◀新しいところ

複雑な式への代入では, 代入される式を簡単にしてから, その簡単にした式に代入します。

ここでは, 代入される式は有理化してからその式に代入します。

No. 2 5 式の値(2) 因数分解→代入

$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ のとき, $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ の値を求めなさい。

*** 応用する点**

- 1 x の 2 重根号をはずしておきます。
 - 2 (4 次式に直接 x を代入すると…, ”日が暮れます”。)
4 次式を因数分解して, その式に代入して, 式の値を求めます。
「多項式の式の値」という分野との融合問題です。
- ▶ 「因数分解」の基礎学習は → 「数と式・整式 No. 2 8 (1 / 4) ~ (4 / 4)」

No. 2 5 式の値(3) 対称式→代入

$x = \sqrt{5 - \sqrt{24}}$, $y = \sqrt{8 - \sqrt{60}}$ のとき, $x + y$, $x^2 + 3xy + y^2$ の値を求めなさい。

*** 応用する点**

- 1 x と y の 2 重根号をはずしておきます。
 - 2 基本対称式 ($x + y$ と xy) の値を求めておきます。
 - 3 次に, 多項式を基本対称式に書きかえます。
 - 4 最後に, その書きかえた式に基本対称式の値を代入します。
「対称式」という分野との融合問題です。
- ▶ 「対称式」の基礎学習は → 「数と式・実数 No. 1 8 (1 / 8) ~ (8 / 8)」

No. 2 5 式の値(4) 整数部分・小数部分→代入

$x = \sqrt{42 + 12\sqrt{6}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とするとき, $\frac{a}{b(b+4)}$ の値を求めなさい。

*** 応用する点**

- 1 x の 2 重根号をはずしておきます。
 - 2 a と b の値を求めます。
 - 3 a と b の値を $\frac{a}{b(b+4)}$ に代入します。
「整数部分, 小数部分」という分野との融合問題です。
- ▶ 「整数部分, 小数部分」の基礎学習は → 「数と式・実数 No. 2 1 (1 / 9) ~ (9 / 9)」

No. 2 6 文字を含む 2 重根号のはずし方

次の式を簡単にしなさい。

$$\sqrt{a+8+6\sqrt{a-1}} - \sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}}$$

* 応用する点

① それぞれの項の2重根号は、はずしておきます。

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}} = \sqrt{a+8-2\sqrt{9(a-1)}} = \sqrt{a-1} - \sqrt{9}$$

としてはいけません。なぜならば、 $\sqrt{a-1} - \sqrt{9}$ は a の値によって正にも負にもなるからで、 \sqrt{A} では $A < 0$ になってはいけなからです。

$$\text{そこで, } = \sqrt{a+8-2\sqrt{9(a-1)}} = |\sqrt{a-1} - \sqrt{9}| = |\sqrt{a-1} - 3|$$

として,

③ (i) $\sqrt{a-1} - 3 \geq 0$ と (ii) $\sqrt{a-1} - 3 < 0$ の場合に分けて、式を整理します。

「文字を含む平方根の外し方」という分野との融合問題です。

「2重根号のはずし方」の問題としては、最高難度の問題の1つです。

▶ 「 $\sqrt{(\text{文字式})^2}$ の簡約化」の基礎学習は → 「数と式・実数 No.15(1/9)~(9/9)」

まとめ

No.23では、「2重根号のはずし方」の解法プロセスに新しい条件が加わった問題です。
2重根号をはずし、さらに2重根号をはずします。

◀新しい条件

No.24~No.26では、最初に「2重根号をはずした形」に変形し、その形を融合する問題の解法プロセスに組み込んで使うこととなります。

No.24では、2重根号をはずした形を、分数の無理式に代入する解法プロセスへ組み込みます。ここでは、メインの解法プロセスは、分数の無理式を計算するプロセスです。だから、分母の有理化から始めます。

No.25では、2重根号をはずした形を、

- (1) では、分数の無理式へ代入して式の値を求める解法プロセスへ組み込みます。
メインの解法プロセスは、分数の無理式を計算するプロセスです。有理化から始めます。
- (2) では、4次式の多項式へ代入して式の値を求める解法プロセスへ組み込みます。
メインの解法プロセスは、多項式の式の値を求める解法プロセスです。
代入される式を簡単にするために、因数分解することから始めます。
- (3) では、対称式へ代入して式の値を求める解法プロセスへ組み込みます。
メインの解法プロセスは、対称式の式の値を求める解法プロセスです。
基本対称式の値を求め、与式を基本対称式で書きかえることから始めます。
- (4) では、整数部分と小数部分を分数式に代入した値を求める解法プロセスへ組み込みます。
メインの解法プロセスは、平方根の整数部分と小数部分を求める解法プロセスです。
平方根の整数部分と小数部分を求めることから始めます。

No.26では、「2重根号のはずし方」の解法プロセスに新しい条件が加わった問題です。
文字を含む2重根号をはずします。

◀新しい条件

メインの解法プロセスは、文字を含む根号のはずし方の解法プロセスです。



以上のように、

- ・「2重根号のはずし方」に新しい条件が付加された問題では、その新しい条件の解法プロセスに従って2重根号をはずします。
- ・「2重根号のはずし方」が、他の分野との融合問題であるときには、
 - ① 最初に、2重根号をはずしておきます。
 - ② 2重根号をはずした形を、融合する問題の解法プロセスの中に組み込みます。組み込まれる解法プロセスがメインプロセスになりますので、2重根号をはずした後は、この組み込まれる解法のヒュリスティックスに従って問題を解きます。

「応用力の学び方」を文章で具体的に説明すると、上のように複雑になりますが、No. 22～No. 26のプリントの問題を前から順に解いていくと、上で言葉で説明した「応用力を身につける」学習をしていることになります。

「2重根号のはずし方」の全学習計画 －「応用力」の学び方の具体例－

ここで、「2重根号のはずし方」の全学習計画をまとめて一覧表にしておきます。すべて、数専ゼミの教室で学習することができます。

■「2重根号をはずし方」の基本4パターン

No. 22 2重根号をはずし方の基本プロセス

- | | |
|---|-------------------|
| <p>①型 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ 型（基本型）</p> <p>$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ より、
「かけて3になる2数のうち、その和が4になる」組み合わせを見つける。
ただし、$a > 0$、$b > 0$とする。</p> | ◀ 8 題 |
| <p>②型 $\sqrt{5-\sqrt{24}}$ 型：$2\sqrt{\quad}$ を作るために、
<u>$\sqrt{\quad}$ の中の 2^2 を外へ出す型</u></p> | ◀ 3 題 |
| <p>③型 $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$ 型：$2\sqrt{\quad}$ を作るために、
<u>$\sqrt{\quad}$ の前の2以外の因数を平方数にして $\sqrt{\quad}$ の中へ入れる型</u></p> | ◀ 3 題 |
| <p>④型 $\sqrt{6+\sqrt{35}}$ 型：$2\sqrt{\quad}$ を作るために、
<u>$\sqrt{\quad}$ の中の数全体を2倍して2でわる型</u></p> | ◀ 4 題 |
| <p>①型～④型の混合練習問題</p> | ◀ 14 題
小計 32 題 |

■ 「2重根号のはずし方」の応用問題

No. 2 3 2重根号を2回はずす

◀ 3 題

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$

(2) $\sqrt{10+3\sqrt{97+56\sqrt{3}}}$

No. 2 4 2重根号の有理化

◀ 8 題

次の2重根号をはずして簡単にしなさい。

(1) $\frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{\sqrt{19-8\sqrt{3}}}$

(2) $\sqrt{7+2\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}$

(3) $\sqrt{\frac{\sqrt{6+1} + \sqrt{6+3}}{\sqrt{6-1} + \sqrt{6+1}}}$

No. 2 5 式の値(1) 有理化→代入

◀ 2 題

$x = \sqrt{12+2\sqrt{35}}$, $y = \sqrt{12-2\sqrt{35}}$ のとき, $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ の値を求めなさい。

式の値(2) 因数分解→代入

◀ 1 題

$x = \sqrt{3-\sqrt{8}}$ のとき, $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ の値を求めなさい。

式の値(3) 対称式→代入

◀ 1 題

$x = \sqrt{5-\sqrt{24}}$, $y = \sqrt{8-\sqrt{60}}$ のとき, $x+y$, $x^2+3xy+y^2$ の値を求めなさい。

式の値(4) 整数部分・小数部分→代入

◀ 2 題

$x = \sqrt{42+12\sqrt{6}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とするとき, $\frac{a}{b(b+4)}$ の値を求めなさい。

No. 2 6 文字を含む2重根号のはずし方

◀ 4 題

次の式を簡単にしなさい。

$$\sqrt{a+8+6\sqrt{a-1}} - \sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}}$$

小計 2 1 題

合計 5 3 題

【注】「No. **」は, 数専ゼミの授業で使うプリントのナンバーです。

* 詳しくは, 数学 I ・実数の「[学習計画書](#)」をご覧ください。

◀ ● ■ 学習教材 ■ ● ▶

高校数学 I ・数と式 2 ・実数 No. 2 2

4 2重根号 (その1)

■ 2重根号のはずし方 ■

学習教材 → Link : | [高校数学 I ・教材サンプル MENU](#) | / [2] 実数 No. 2 2

★演習★は, 数専ゼミ・東原教室で指導しています。いつからでも入塾できます。

「応用力」が学べる

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp

基礎とテスト対策は数専ゼミで！

- 在籍学年に関係なく、算数・数学のどの分野でも学習できます。
いつからでも、どこからでも、始められます。
- 他塾に在籍していても、**数専ゼミ**で「算数・数学」だけ指導を受けることもできます。

* コマーシャル 数専ゼミ・山形東原教室 → Link: | [入学案内書](#) |