

山形大学入試問題・前期

2024. 8. 17(土)

2020年度 数学

(1/1)

【第3問】

平面上の $\triangle ABC$ とその内部の点 P が、

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = 1$$

と満たすとする。また、 $k = |\overrightarrow{PA}|$ とする。このとき、次の問に答えよ。

(1) k^2 を内積 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ を用いて表せ。

★(2) 内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC}$ を k を用いて表せ。

(3) 直線 PA と線分 BC の交点を D とすると、 \overrightarrow{PD} を \overrightarrow{PB} と \overrightarrow{PC} を用いて表せ。

(4) 線分 AB の垂直二等分線と線分 AC の交点を E とすると、 \overrightarrow{PE} を \overrightarrow{PB} と \overrightarrow{PC} を用いて表せ。

(5) $\triangle ABC$ の面積を k を用いて表せ。

【学習のための基礎資料】

【入試情報】山形大学の入試問題(2020年度・数学)は、第1問から第6問まであり、学部に応じて、次のように解答することが求められております。

人文社会科学部 第1, 2, 3問 (90分)

理学部 第1, 3, 4, 5問 (120分)

医学部 第1, 3, 5, 6問 (120分)

農学部 第1, 2, 3, 4問 (120分)

★

■第3問の出題項目：ベクトル(数学B)

◀2024年度からは「数学C」

出題内容： $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ を満たす $\triangle ABC$ の内部の点 P

■今回は、第3問のうち(2)のみの解答です。◀((1)(3)(4)(5)は別ファイルになります。)

■2020年度・第3問(2)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル教材)

(1) 数学B ベクトルと図形 No.4(1/5), (2/5) ◀位置ベクトルの問題の解き方の基本

Link: → [ベクトルと図形](#) | [学習計画書](#) |

数専ゼミの高校数学教材は、山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから、この教材を学び切ることで、山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

■2020年度・第3問を解くための「数専ゼミ受験対策基礎講座」について

基本から詳しく学び、いっぱい練習して確実に解けるようになるために…

数学B 「ベクトルとその演算」 | [学習計画書](#) | 例題研究31題, 問題演習111題

「ベクトルと図形」 | [学習計画書](#) | 例題研究25題, 問題演習96題

在籍学年に関係なく、だれでも、いつからでも受講できます。

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2020年度・第3問(2)】 - 〈2枚目/3枚〉

➤ (前のページからのつづき)

【考え方】(2) (1) で $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}$ を k で表し、与えられている条件は $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = 1$ だから、(2) もすべて \overrightarrow{PB} と \overrightarrow{PC} を用いて書きかえるのだろうな、と予想できます。

\overrightarrow{PA} は、(1) で使った”手”である「 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ 」より、
 $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}$ 」を使えばいいとわかりますが、 \overrightarrow{BC} をどうするかが、この問題での、あえて言えば、”鍵”となります。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは、前の問の結果をうまく取り込むことで、次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれんかどうかで正解できるかどうかの分かれ目になります。

■この(2)の問題では、

問題は「 k を用いて表せ。」と言っているので、「(1)の結果を使え。」と教えてくれています。

なお、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC}$ は、この後の問題では使いません。「袋小路」の問題です。

【問題】

平面上の $\triangle ABC$ とその内部の点 P が、

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \quad |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = 1$$

を満たすとする。また、 $k = |\overrightarrow{PA}|$ とする。このとき、次の問に答えよ。

★(2) 内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC}$ を k を用いて表せ。

[答 案]

条件 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ より、

$$\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}$$

条件 $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = 1$ より、

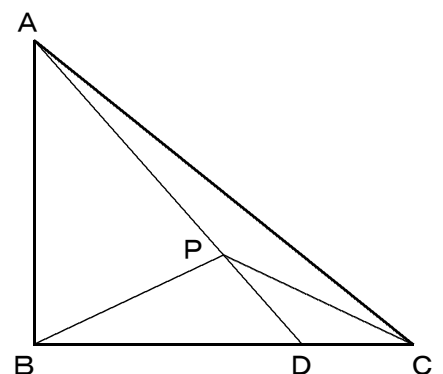
$$|\overrightarrow{PB}|^2 = 1, \quad |\overrightarrow{PC}|^2 = 1$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$$

◀点 P を基点として、後一前

$$(1) \text{ より, } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{k^2 - 5}{4}$$

《図的状況》



(次のページへつづく) ➤

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2020年度・第3問(2)】 - 〈3枚目 / 3枚〉

↗ (前のページからのつづき)

よって,

$$\begin{aligned}\vec{PA} \cdot \vec{BC} &= (-\vec{PB} - 2\vec{PC}) \cdot (\vec{PC} - \vec{PB}) \\ &= |\vec{PB}|^2 + \vec{PB} \cdot \vec{PC} - 2|\vec{PC}|^2 \\ &= 1^2 + \frac{k^2 - 5}{4} - 2 \cdot 1^2 \\ &= \frac{k^2 - 5}{4} - \frac{4}{4} \\ &= \underline{\underline{\frac{k^2 - 9}{4}}}\end{aligned}$$