



山形大学入試問題・前期

2024. 8. 16 (金)

2020年度 数学

(1/1)

【第3問】

平面上の $\triangle ABC$ とその内部の点 P が、

$$\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}, \quad |\vec{PB}| = |\vec{PC}| = 1$$

と満たすとする。また、 $k = |\vec{PA}|$ とする。このとき、次の問に答えよ。

- ★(1) k^2 を内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ を用いて表せ。
- (2) 内積 $\vec{PA} \cdot \vec{BC}$ を k を用いて表せ。
- (3) 直線 PA と線分 BC の交点を D とするとき、 \vec{PD} を \vec{PB} と \vec{PC} を用いて表せ。
- (4) 線分 AB の垂直二等分線と線分 AC の交点を E とするとき、 \vec{PE} を \vec{PB} と \vec{PC} を用いて表せ。
- (5) $\triangle ABC$ の面積を k を用いて表せ。

【学習のための基礎資料】

【入試情報】山形大学の入試問題(2020年度・数学)は、第1問から第6問まであり、学部に応じて、次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第1, 2, 3問	(90分)
理学部	第1, 3, 4, 5問	(120分)
医学部	第1, 3, 5, 6問	(120分)
農学部	第1, 2, 3, 4問	(120分)

★

■第3問の出題項目：ベクトル(数学B)

◀2024年度からは「数学C」

出題内容： $\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$ を満たす $\triangle ABC$ の内部の点 P

■今回は、第3問のうち(1)のみの解答です。◀((2)(3)(4)(5)は別ファイルになります。)

■2020年度・第3問(1)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル教材)

(1) 数学Ⅱ ベクトルとその演算 No.23(3/5)

◀”平方公式”の証明

No.25s(1/3)

◀”平方公式”と内積の利用

Link: → ベクトルとその演算 | [学習計画書](#) |

数専ゼミの高校数学教材は、山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから、この教材を学び切ることで、山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2020年度・第3問(1)】 - 〈2枚目/2枚〉

➤ (前のページからのつづき)

【考え方】(1) 一般に、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の乗法公式より、 a 、 b がベクトルのとき、 a^2 と b^2 の部分が絶対値の2乗、 $2ab$ の部分が内積にあたります。これは、内積に関する問題を解くときによく使う”手”です。この問題でいえば、 $(\vec{PB} + \vec{PC})^2 = |\vec{PB}|^2 + 2\vec{PB} \cdot \vec{PC} + |\vec{PC}|^2$ 。これと、与えられた条件 $(\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$ と $k = |\vec{PA}|$ と $|\vec{PB}| = |\vec{PC}| = 1$) を組み合わせると、 k^2 は、内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ を使って表すことができます。公式をどのように使うかではなく、与えられた条件を使って求める形をどのように導き出すかという技術が問われています。(いわゆる“思考力”です。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは、前の問の結果をうまく取り込むことで、次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれんかどうかで正解できるかどうかの分かれ目になります。

■この(1)の問題では、

(2) 以降の設問をさっと見ても、内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ の値を k^2 で表したものを使うのだろうなと予想できます。だから、(1)が解けないと、第3問は0点です。逆に、(2)以降の問題で行き詰まったら、内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ を作り出すことを考えると”道は開けます”。

【 問 題 】

平面上の $\triangle ABC$ とその内部の点 P が、

$$\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}, \quad |\vec{PB}| = |\vec{PC}| = 1$$

を満たすとする。また、 $k = |\vec{PA}|$ とする。このとき、次の問に答えよ。

★(1) k^2 を内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ を用いて表せ。

[答 案]

$$\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0} \text{ より,}$$

$$\vec{PA} = -\vec{PB} - 2\vec{PC}$$

であるから、

$$\begin{aligned} k^2 &= |\vec{PA}|^2 \\ &= |-\vec{PB} - 2\vec{PC}|^2 \\ &= |\vec{PB}|^2 + 4\vec{PB} \cdot \vec{PC} + 4|\vec{PC}|^2 \\ &= 1^2 + 4\vec{PB} \cdot \vec{PC} + 4 \cdot 1^2 \\ &= \underline{4\vec{PB} \cdot \vec{PC} + 5} \end{aligned}$$

《図的状況》

